Funzioni di più variabili: matrice hessiana, direzioni di crescita e di decrescita

Lezione del 12 novembre 2018

Matematica generale. Corso A

Il vettore avente per componenti le derivate parziali della funzione è detto **gradiente della funzione** ed è denotato con

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$$

Esempio

Il vettore avente per componenti le derivate parziali della funzione è detto **gradiente della funzione** ed è denotato con

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$$

Esempio

a) Calcolare il gradiente di $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 7xy^2$.
b) Calcolare il gradiente di f nel punto $(5,-1)$

Il vettore avente per componenti le derivate parziali della funzione è detto **gradiente della funzione** ed è denotato con

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$$

Esempio

a) Calcolare il gradiente di $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 7xy^2$.
b) Calcolare il gradiente di f nel punto $(5,-1)$
a) La derivata parziale rispetto ad x è: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) = 3x^2 - 7y^2$.
La derivata parziale rispetto ad y è: $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0) = 4y - 14xy$.

Il vettore avente per componenti le derivate parziali della funzione è detto **gradiente della funzione** ed è denotato con

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$$

Esempio

a) Calcolare il gradiente di $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 7xy^2$.
b) Calcolare il gradiente di f nel punto $(5,-1)$
a) La derivata parziale rispetto ad x è: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) = 3x^2 - 7y^2$.
La derivata parziale rispetto ad y è: $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0) = 4y - 14xy$.
Il vettore gradiente è dato da $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 7y^2 \\ 4y - 14xy \end{pmatrix}$

Il vettore avente per componenti le derivate parziali della funzione è detto **gradiente della funzione** ed è denotato con

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$$

Esempio

a) Calcolare il gradiente di $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 7xy^2$.
b) Calcolare il gradiente di f nel punto $(5,-1)$
a) La derivata parziale rispetto ad x è: $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) = 3x^2 - 7y^2$.
La derivata parziale rispetto ad y è: $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0) = 4y - 14xy$.
Il vettore gradiente è dato da $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 7y^2 \\ 4y - 14xy \end{pmatrix}$

b) $\nabla f(5,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(5,-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(5,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 * 25 - 7 \\ -4 + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 66 \end{pmatrix}$

- Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$, una funzione derivabile parzialmente in ogni punto $(x, y) \in A$.
  Se ogni derivata parziale è a sua volta derivabile rispetto a x ed a y, si dice che f ammette **derivate parziali seconde**.

- Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$, una funzione derivabile parzialmente in ogni punto $(x, y) \in A$.
  Se ogni derivata parziale è a sua volta derivabile rispetto a x ed a y, si dice che f ammette **derivate parziali seconde**.
- La derivata parziale di $\frac{\partial f}{\partial x}$ rispetto alla variabile x è denotata con $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ oppure con $f_{x,x}$.

- Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$, una funzione derivabile parzialmente in ogni punto $(x, y) \in A$.
  Se ogni derivata parziale è a sua volta derivabile rispetto a x ed a y, si dice che f ammette **derivate parziali seconde**.
- La derivata parziale di $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ rispetto alla variabile x è denotata con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ oppure con $f_{x,x}$.
- La derivata parziale di $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ rispetto alla variabile y è denotata con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ oppure con $f_{y,y}$.
- Le derivate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sono dette **derivate parziali seconde pure.**

- La derivata parziale di $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ rispetto alla variabile y è denotata con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oppure con $f_{x,y}$.

- La derivata parziale di $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ rispetto alla variabile y è denotata con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oppure con $f_{x,y}$.
- La derivata parziale di $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ rispetto alla variabile x è denotata con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oppure con $f_{y,x}$.

- La derivata parziale di $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ rispetto alla variabile y è denotata con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oppure con $f_{x,y}$.
- La derivata parziale di $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ rispetto alla variabile x è denotata con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oppure con $f_{y,x}$.
- Le derivate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sono dette **derivate parziali seconde miste**.

- La derivata parziale di $\frac{\partial f}{\partial x}$ rispetto alla variabile y è denotata con $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oppure con $f_{x,y}$.
- La derivata parziale di $\frac{\partial f}{\partial y}$ rispetto alla variabile x è denotata con $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oppure con $f_{y,x}$.
- Le derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sono dette **derivate parziali seconde miste**.
- Una funzione che ammette derivate parziali prime e seconde continue è detta di classe C^2. Per essa si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

.

- Le derivate parziali seconde possono essere raccolte nella seguente matrice, detta **matrice Hessiana**,

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{x,y} & f_{x,y} \\ f_{y,x} & f_{y,y} \end{bmatrix}$$

- La matrice Hessiana di una funzione di classe C^2 è simmetrica.

Esempio

a) Calcolare la matrice Hessiana di $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 7xy^2$.
b) Calcolare la matrice Hessiana di f nel punto $(5,-1)$
a) Ricordando che $\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 7y^2, 4y - 14xy\right)^T$, si ha:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -14y \\ -14y & 4x \end{bmatrix}$$

b) $H(5,-1) = \begin{bmatrix} 30 & 14 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}$

Esempio

a) Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di $f(x,y) = \log(2x+y) + y^3$.
b) Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f nel punto $(1,0)$.

Svolgimento a) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2x+y} 2, \frac{1}{2x+y} + 3y^2 \right)^T$ e

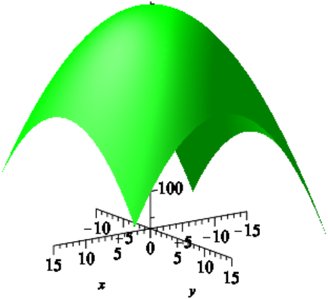
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2\frac{-2}{(2x+y)^2} & 2\frac{-1}{(2x+y)^2} \\ \frac{-2}{(2x+y)^2} & 2\frac{-1}{(2x+y)^2} + 6y \end{bmatrix}$$

b) $\nabla f(1,0) = \left(\frac{1}{2} 2, \frac{1}{2} \right)^T = (1, \frac{1}{2})^T$

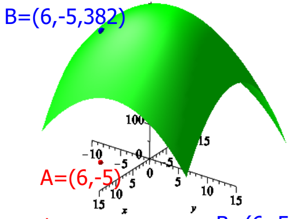
$$H(1,0) = \begin{bmatrix} 2\frac{-2}{(2)^2} & 2\frac{-1}{(2)^2} \\ \frac{-2}{(2)^2} & 2\frac{-1}{(2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, con $X \subset \mathbb{R}^2$, il suo grafico G_f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, ovvero

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in X, z = f(x, y)\}$$



Data la funzione $f(x, y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$, calcolare il valore di f nel punto $(6, -5)$ significa sostituire nella funzione $x = 6$ e $y = -5$, ovvero
$f(6, -5) = 6^2 + 3 * (6) - (-5)^2 + 5(-5) + 450 = 382.$



A=(6,-5) punto del dominio di f

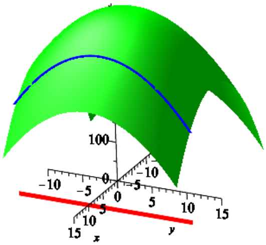
B=(6,-5,382) punto del grafico di f

- Data $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la **restrizione** di f su un sottoinsieme $A \subset X$ è la funzione ottenuta valutando f sui **soli** punti di A.

- Data $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la **restrizione** di f su un sottoinsieme $A \subset X$ è la funzione ottenuta valutando f sui **soli** punti di A.
- Determinare la restrizione di f lungo una retta di equazione $x = k$, significa valutare f nei punti di coordinate (k, y), con $y \in X$. $f(k, y)$ è una funzione nella sola variabile y, denotata con $\varphi(y)$.

- Data $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la **restrizione** di f su un sottoinsieme $A \subset X$ è la funzione ottenuta valutando f sui **soli** punti di A.
- Determinare la restrizione di f lungo una retta di equazione $x = k$, significa valutare f nei punti di coordinate (k, y), con $y \in X$. $f(k, y)$ è una funzione nella sola variabile y, denotata con $\varphi(y)$.
  Esempio:la restrizione di $f(x, y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$ sulla retta di equazione $x = 10$ è la funzione
  $\varphi(y) = f(10, y) = -100 + 30 - y^2 + 5y + 450 = -y^2 + 5y + 380.$

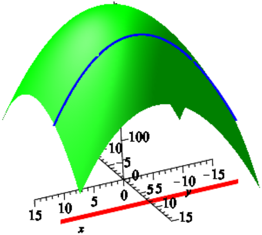
- Data $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la **restrizione** di f su un sottoinsieme $A \subset X$ è la funzione ottenuta valutando f sui **soli** punti di A.
- Determinare la restrizione di f lungo una retta di equazione $x = k$, significa valutare f nei punti di coordinate (k, y), con $y \in X$. $f(k, y)$ è una funzione nella sola variabile y, denotata con $\varphi(y)$.
  Esempio:la restrizione di $f(x, y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$ sulla retta di equazione $x = 10$ è la funzione
  $\varphi(y) = f(10, y) = -100 + 30 - y^2 + 5y + 450 = -y^2 + 5y + 380.$



- Determinare la restrizione di f lungo una retta di equazione $y = k$, significa valutare f nei punti di coordinate (x, k), con $x \in X$. $f(x, k)$ è una funzione nella sola variabile x, denotata con $\varphi(x)$.

- Determinare la restrizione di f lungo una retta di equazione $y = k$, significa valutare f nei punti di coordinate (x, k), con $x \in X$. $f(x, k)$ è una funzione nella sola variabile x, denotata con $\varphi(x)$.
  Esempio:la restrizione di $f(x, y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$ sulla retta di equazione $y = 8$ è la funzione
  $\varphi(x) = f(x, 8) = -x^2 + 3x - (-8)^2 + 5(-8) + 450 =$
  $-x^2 + 3x + 426$.

- Determinare la restrizione di f lungo una retta di equazione $y = k$, significa valutare f nei punti di coordinate (x, k), con $x \in X$. $f(x, k)$ è una funzione nella sola variabile x, denotata con $\varphi(x)$.
  Esempio:la restrizione di $f(x, y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$ sulla retta di equazione $y = 8$ è la funzione
  $\varphi(x) = f(x, 8) = -x^2 + 3x - (-8)^2 + 5(-8) + 450 =$
  $-x^2 + 3x + 426$.



- Ricordiamo che l'equazione parametrica di una retta di direzione $d = (d_1, d_2)$ passante per il punto (x^0, y^0) è

$$\begin{cases} x(t) = x^0 + td_1 \\ y(t) = y^0 + td_2 \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

- Ricordiamo che l'equazione parametrica di una retta di direzione $d = (d_1, d_2)$ passante per il punto (x^0, y^0) è

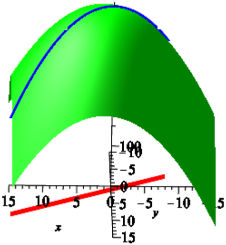
$$\begin{cases} x(t) = x^0 + td_1 \\ y(t) = y^0 + td_2 \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

- Determinare la restrizione di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lungo la retta di equazione $(x(t), y(t))$ significa valutare f nei punti di coordinate $(x^0 + td_1, y^0 + td_2)$, con $t \in \mathbb{R}$. La restrizione è una funzione nella sola variabile t, denotata con $\varphi(t)$.

- Ricordiamo che l'equazione parametrica di una retta di direzione $d = (d_1, d_2)$ passante per il punto (x^0, y^0) è

$$\begin{cases} x(t) = x^0 + td_1 \\ y(t) = y^0 + td_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Determinare la restrizione di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lungo la retta di equazione $(x(t), y(t))$ significa valutare f nei punti di coordinate $(x^0 + td_1, y^0 + td_2)$, con $t \in \mathbb{R}$. La restrizione è una funzione nella sola variabile t, denotata con $\varphi(t)$.



Esempio

Data la funzione $f(x,y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$, determinare la restrizione di f, $\varphi(t)$ lungo la retta di direzione $d = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, passante per $(x^0, y^0) = (4,3)$.
Soluzione: l'equazione della retta è:

$$\begin{cases} x(t) = 4 + t \\ y(t) = 3 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

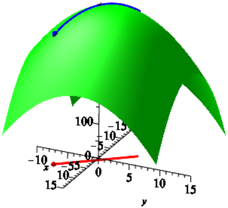
La restrizione di $f(x,y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$ sulla retta di equazione $x(t) = 4 + t, y(t) = 3 + \frac{1}{2}t$ è la funzione

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f\left(4 + t, 3 + \tfrac{1}{2}t\right) \\ &= -(4+t)^2 + 3(4+t) - \left(3 + \tfrac{1}{2}t\right)^2 + 5\left(3 + \tfrac{1}{2}t\right) + 450 \\ &= -\tfrac{5}{4}t^2 - \tfrac{11}{2}t + 452. \end{aligned}$$

- Ricordiamo che l'equazione parametrica di una semiretta di direzione $d = (d_1, d_2)$ uscente dal punto (x^0, y^0) è

$$\begin{cases} x(t) = x^0 + td_1 \\ y(t) = y^0 + td_2 \end{cases} \quad t \geq 0$$

- Determinare la restrizione di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lungo la semiretta di equazione $(x(t), y(t))$ significa valutare f nei punti di coordinate $(x^0 + td_1, y^0 + td_2)$, con $t \geq 0$. La restrizione è una funzione nella variabile t, denotata con $\varphi_d(t)$.



Esempio

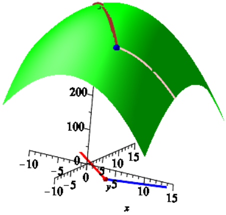
Data $f(x,y) = -x^2 + 3x - y^2 + 5y + 450$, determinare:
a) la restrizione di f, $\varphi_d(t)$ lungo la semiretta uscente da $(x^0, y^0) = (6, -5)$ e di direzione $d = (-1, 1)$.
b) la restrizione di f, $\varphi_u(t)$ lungo la semiretta uscente da $(x^0, y^0) = (6, -5)$ e di direzione $u = (3, 1)$.
Soluzione: a) La restrizione di $f(x, y)$ sulla semiretta di equazione $x(t) = 6 - t, y(t) = -5 + t$, $t \geq 0$ è la funzione

$$\begin{aligned} \varphi_d(t) &= f(6-t, -5+t) \\ &= -(6-t)^2 + 3(6-t) - (-5+t)^2 + 5(-5+t) + 450 \\ &= -2t^2 + 24t + 382. \end{aligned}$$

Soluzione b). La restrizione di $f(x, y)$ sulla semiretta di equazione $x(t) = 6 + 3t, y(t) = -5 + t$ è la funzione

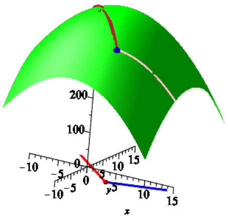
$$\begin{aligned} \varphi_u(t) &= f(6+3t, -5+t) \\ &= -(6+3t)^2 + 3(6+3t) - (-5+t)^2 + 5(-5+t) + 450 \\ &= -10t^2 - 12t + 382. \end{aligned}$$

Graficamente si ha:



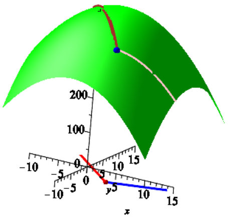
- In figura, la semiretta di direzione $d = (-1, 1)$ è colorata di rosso, mentre quella di direzione $u = (3, 1)$ è blu.

Graficamente si ha:



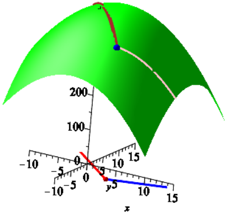
- In figura, la semiretta di direzione $d = (-1, 1)$ è colorata di rosso, mentre quella di direzione $u = (3, 1)$ è blu.
- Partendo da $(6, -5)$ e muovendoci "di poco" lungo la direzione $d = (-1, 1)$, il valore di f aumenta.

Graficamente si ha:



- In figura, la semiretta di direzione $d = (-1, 1)$ è colorata di rosso, mentre quella di direzione $u = (3, 1)$ è blu.
- Partendo da $(6, -5)$ e muovendoci "di poco" lungo la direzione $d = (-1, 1)$, il valore di f aumenta.
- Partendo da $(6, -5)$ e muovendoci "di poco" lungo la direzione $u = (3, 1)$, il valore di f diminuisce.

Graficamente si ha:



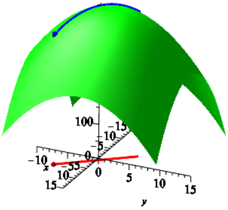
- In figura, la semiretta di direzione $d = (-1, 1)$ è colorata di rosso, mentre quella di direzione $u = (3, 1)$ è blu.
- Partendo da $(6, -5)$ e muovendoci "di poco" lungo la direzione $d = (-1, 1)$, il valore di f aumenta.
- Partendo da $(6, -5)$ e muovendoci "di poco" lungo la direzione $u = (3, 1)$, il valore di f diminuisce.
- d è detta **direzione di crescita locale** uscente da $(6, -5)$
- u è detta **direzione di decrescita locale** uscente da $(6, -5)$.

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile
- s la semiretta di origine (x^0, y^0) e di direzione $d = (d_1, d_2)$, $d \neq 0$.
- Sia $\varphi_d(t) = f(x^0 + td_1, y^0 + td_2), t \geq 0$ la restrizione di f su s.

- *d è una* **direzione di crescita** *locale se esiste $\epsilon > 0$ tale che*

$$\varphi_d(t) > \varphi_d(0) \textit{ per ogni } t \in (0, \epsilon)$$

o, equivalentemente, se
$f(x^0 + td_1, y^0 + td_2) > f(x^0, y^0)$ *per ogni* $t \in (0, \epsilon)$.



- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile
- s la semiretta di origine (x^0, y^0) e di direzione $d = (d_1, d_2)$, $d \neq 0$.
- Sia $\varphi_d(t) = f(x^0 + td_1, y^0 + td_2), t \geq 0$ la restrizione di f su s.

- *d è una* **direzione di decrescita** *locale se esiste $\epsilon > 0$ tale che*

$$\varphi_d(t) < \varphi_d(0) \text{ per ogni } t \in (0, \epsilon)$$

o, equivalentemente, se
$f(x^0 + td_1, y^0 + td_2) < f(x^0, y^0)$ *per ogni* $t \in (0, \epsilon)$.