

FORME INDETERMINATE

Nel calcolo di limiti , rappresentano soluzioni non determinate. Esse sono:

$$+\infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$1^\infty$$

$$0^0$$

$$\infty^0$$

PER “**TOGLIERE L’INDETERMINAZIONE**”
uso procedimenti che dipendono dai vari casi

F. RAZIONALE INTERA: Forma Ind $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + x - 4 \stackrel{\text{sostituisco}}{=} +\infty - \infty + \infty - 4 = +\infty - \infty$$

Forma Indeterminata

I METODO Per eliminare l'indeterminazione: **RACCOLGO** la X di grado max

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{4}{x^3} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) \\ & = (+\infty)^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} - \frac{4}{+\infty} \right) = +\infty \cdot (1 - 0 + 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

raccolgo x^3 e, dentro la parentesi,
divido i monomi per x^3

IMPORTANTE : dentro la parentesi
DEVO SEMPLIFICARE
E poi “ passo a l limite “ sostituendo

II METODO (VELOCE) : considero **INFINITO DI ORDINE SUPERIORE***

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + x - 4 \stackrel{=}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

* La x con esponente più alto

Es1) F. IND. $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^5 - 2x^2 + 7$$

sostituisco

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^5 - 2x^2 + 7 = +\infty - \infty + 7 = +\infty - \infty$$

I METODO : RACCOLGO LA X DI GRADO MASSIMO (x^5)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-8 - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{7}{x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-8 - \frac{2}{x^3} + \frac{7}{x^5} \right) =$$

Ora “**passo al limite**” (sostituendo) e ottengo:

$$= (-\infty)^5 \cdot (-8 - 0 + 0) = -\infty \cdot (-8) = +\infty$$

II METODO (VELOCE) : considero INFINITO DI ORDINE SUPERIORE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^5 - 2x^2 + 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^5 = -8(-\infty)^5 = -8(-\infty) = +\infty$$

Es2) F. IND $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 + 5x^2 + x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 + 5x^2 + x + 3 = +\infty + \infty - \infty + 3 = +\infty - \infty$$

I METODO: RACCOLGO LA X DI GRADO MASSIMO (x^4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(2 + \frac{5x^2}{x^4} + \frac{x}{x^4} + \frac{3}{x^4} \right) =$$

semplifico
dentro la parentesi.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(2 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right) =$$

Ora “**passo al limite**” e
sostituisco $-\infty$ al posto della x

$$= (-\infty)^4 \cdot (2 + 0 + 0 + 0) = +\infty \cdot 2 = +\infty$$

II METODO (VELOCE) : considero INFINITO DI ORDINE SUPERIORE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 + 5x^2 + x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 = 2(-\infty)^4 = +\infty$$

∞/∞ FUNZIONE RAZIONALE FRATTA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 7x - 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

I METODO:
RACCOLGO
LA X DI
GRADO MAX

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot \left(1 + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2}{x^3}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{7x}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 \cdot \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right)}{1 \cdot \left(1 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{(+\infty)^1 \cdot (1 + 0 - 0)}{1 \cdot (1 - 0 - 0)} = +\infty$$

II METODO
veloce
CONSIDERO
INFINITI
ORDINE SUP

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 7x - 4} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = +\infty$$

REGOLA PRATICA

Se $\text{gradoNUM} > \text{gradoDEN}$ il risultato è infinito ∞

Se $\text{gradoNUM} = \text{gradoDEN}$ il risultato è finito $/$

Se $\text{gradoNUM} < \text{gradoDEN}$ il risultato è zero 0

Es 1: FORMA IND ∞/∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 3x + 7}{5x^2 + 6x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

GradoNUM=gradoDEN

I METODO:
RACCOLGO
LA X DI
GRADO MAX

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(9 + \frac{3x}{x^2} + \frac{7}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(5 + \frac{6x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot \left(9 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{1 \cdot \left(5 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} =$$

PASSANDO AL LIMITE
LE FRAZIONI CON DEN INFINITO
TENDONO A 0

$$= \frac{1 \cdot (9 + 0 + 0)}{1 \cdot (5 + 0 - 0)} = \frac{9}{5}$$

II METODO:
CONSIDERO
INFINITI
ORDINE SUP

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 3x + 7}{5x^2 + 6x - 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$$

Es 2: FORMA IND. ∞/∞

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 2}{3x^5 - 7x + 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

**GRADO DEL NUMERATORE
MINORE DI QUELLO DEL
DENOMINATORE**

**I METODO:
RACCOLGO LA X
DI GRADO
MAGGIORE**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \cdot \left(-1 + \frac{4x^2}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right)}{x^5 \cdot \left(3 - \frac{7x}{x^5} + \frac{4}{x^5} \right)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 \cdot \left(-1 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} \right)}{x^2 \cdot \left(3 - \frac{7}{x^4} + \frac{4}{x^5} \right)} = \\ &= \frac{1 \cdot (-1 - 0 - 0)}{(-\infty)^2 \cdot (3 - 0 - 0)} = \frac{-1}{+\infty} = 0^- \end{aligned}$$

**II METODO:
CONSIDERO
INFINITI ORDINE
SUPERIORE**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{3x^2} = \frac{-1}{3(-\infty)^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0^-$$

∞/∞ METODO VELOCE

RAPPORTO FRA INFINITI DI ORDINE SUPERIORE
cioè le x di grado maggiore. Esempi:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+4x^3 + x^2 - 1}{-9x^4 + 7} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+4x^3}{-9x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+4}{-9x} = \frac{+4}{-9(+\infty)} = \frac{+4}{-\infty} = 0^-$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 5x + 1}{-2 + 8x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{+8x} = \frac{2x^3}{8} = \frac{2(-\infty)^3}{8} = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - 7x^3}{x^3 + 2x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^3}{x^3} = \frac{-7}{1} = -7$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + x + 1}{-2x^5 + x - 2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{-2x^5} = \frac{3}{-x^2} \rightarrow \frac{3}{-(-\infty)^2} = \frac{3}{-(+\infty)} = 0^-$

0/0 FUNZIONE RAZIONALE FRATTA

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

Forma INDETERMINATA

SCOMPONGO NUMERATORE e DENOMINATORE

o con le regole di scomposizione (se possibile)

o con Ruffini (sempre possibile con K= valore a cui tende x)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+1)}{(x+3)} = \frac{12}{6} = 2$$

Otterrò sempre un FATTORE

che SI SEMPLIFICA, in questo caso (x-3),

“MANDANDO VIA” L’INDETERMINAZIONE

Es 1 - FORMA IND: 0/0

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} \quad \text{Forma INDETERMINATA}$$

SCOMPONGO NUMERATORE e DENOMINATORE

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)^2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-1)} = \frac{0}{1} = 0$$

**IL FATTORE (x-2) SI SEMPLIFICA
E “MANDA VIA” L’INDETERMINAZIONE**

Es 2- FORMA IND: 0/0

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2x^2 - 32}{x^2 - 3x - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{Forma INDETERMINATA}$$

**SCOMPONGO con RUFFINI [k=4]
e poi semplifico (x-4)**

	1	-2	0	-32
K=4		4	8	+32
	1	2	8	0

	1	-3	-4
K=4		4	4
	1	1	0

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2 + 2x + 8)}{(x-4)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x + 8}{(x+1)} = \frac{32}{5}$$

Es 3 - FORMA IND: 0/0

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - x^2 - 12}{x^5 + x + 34} = \frac{0}{0} \quad \text{Forma INDETERMINATA}$$

SCOMPONGO con RUFFINI e poi semplifico

	1	0	-1	0	-12
K=-2		-2	+4	-6	+12
	1	-2	+3	-6	0

	1	0	0	0	1	+34
K=-2		-2	4	-8	+16	-34
	1	-2	4	-8	+17	0

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6)}{(x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 17)} = -\frac{28}{81}$$