T

CAPITOLO

6

I MONOMI

1 Che cosa sono i monomi

▶ Esercizi a p. 275

I *monomi* sono le espressioni letterali più semplici. Li troviamo spesso in leggi matematiche, fisiche o economiche che legano grandezze di tipo diverso.

Per esempio, se indichiamo con b la base di un triangolo e con h la sua altezza, la sua area A è data dalla formula $A = \frac{1}{2}bh$. Il prodotto $\frac{1}{2}bh$ è un monomio.

Listen to it

A **monomial** is a *product* of numbers and *powers* of variables, with *positive* integer exponents.

DEFINIZIONE
Un **monomio** è un'espressione letterale in cui compaiono soltanto moltiplicazioni fra numeri e potenze di lettere con numeri naturali per esponenti.

▶ Fra le seguenti espressioni trova quali sono monomi e quali no. Motiva la risposta.
xz^2; -9; $a^{-1}b^2$; $2a-3$; $2xaxy$; $a^3b^2 - a^2b^0$; $\frac{2xa^2}{y}$.

ESEMPIO Sono monomi: $2aba^3$, $\frac{1}{2}a^6$, $-bxb^2$, $-3x^2y^5y$, $\left(5+\frac{3}{4}\right)a$.

Non sono monomi: $3\frac{x}{y}$, $2(a+b)$, $4a^3-b^2$, $\frac{x-y}{2a}$.

Qualunque numero può essere considerato un monomio.

Per esempio, possiamo scrivere il numero 7 anche in tanti altri modi: $7a^0$ (con $a \neq 0$), $7b^0$ (con $b \neq 0$), $7a^0b^0x^0$ (con $a, b, x \neq 0$), … Quindi 7 è un monomio.

In particolare, 0 è il **monomio nullo**.

La riduzione di un monomio a forma normale

DEFINIZIONE
Un monomio è ridotto a **forma normale** quando è scritto come prodotto fra un numero e una o più lettere, diverse fra loro, con eventuali esponenti.

ESEMPIO Sono monomi ridotti a forma normale: $\frac{4}{3}a^2b$, $-3xz^4$, a^3b^4.

I monomi $6a3ab$ e $12a^2b^3(-2)a^3$ non sono ridotti a forma normale.

Per ridurre a forma normale un monomio, si applicano le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la prima proprietà delle potenze: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

ESEMPIO Riduciamo a forma normale il monomio $2ab^2\,3b^3a^2$:

$$2ab^2\,3b^3a^2 =$$

Applichiamo la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$2 \cdot 3aa^2b^2b^3 =$$

Applichiamo la proprietà associativa della moltiplicazione:

$$(2 \cdot 3)(aa^2)(b^2b^3) =$$

Calcoliamo il prodotto dei numeri e applichiamo la prima proprietà delle potenze:

$$6a^3b^5.$$

► Scrivi in forma normale i seguenti monomi:

$6a(-6)$; $-\frac{1}{2}a^3b(-8)ab$; $3x^2\left(-\frac{1}{6}\right)$.

DEFINIZIONE
In un monomio ridotto a forma normale, il fattore numerico è il **coefficiente**, le lettere sono la **parte letterale**.

$6\,a^8bc^2$ — **parte letterale**

coefficiente

D'ora in poi, parlando di monomi, intenderemo monomi ridotti a forma normale.

Se il coefficiente di un monomio è uguale a 1 o a -1, il numero 1 non si scrive e viene sottinteso.

Per esempio nel monomio a^3b^2, il coefficiente è uguale a 1 e la parte letterale è a^3b^2. Il monomio $-xz^4$ ha coefficiente uguale a -1.

► Riconosci il coefficiente e la parte letterale dei seguenti monomi.

ax^2y; $-\frac{1}{2}a^3bc$; $2a$; $-\frac{1}{3}$; 12; a^2mn.

Il grado di un monomio

DEFINIZIONE
Il **grado di un monomio rispetto a una lettera** è l'esponente che la lettera ha nel monomio.

Il **grado (complessivo) di un monomio** è la somma dei gradi rispetto a tutte le lettere del monomio.

Monomio	Grado	Grado rispetto ad *a*	Grado rispetto a *b*
$\frac{4}{3}a^2b$	3	2	1
$-a^4$	4	4	0
b	1	0	1

Se un monomio è costituito soltanto da un numero, il suo grado è 0. Per esempio, 8 è un monomio di grado 0.

Al monomio nullo non si attribuisce alcun grado.

► Completa ciascun monomio in modo che abbia il grado indicato a fianco.

- $2a^{\square}b$, 1° grado
- $-\frac{1}{3}xby^{\square}$, 4° grado
- $2a^4b^2x^{\square}$, stesso grado di a^6y
- $\frac{7}{8}x^2y^{\square}z^4$, 8° grado

2 Le operazioni con i monomi

▶ Esercizi a p. 276

L'addizione e la sottrazione di monomi

Consideriamo l'addizione: $2a^2 + 5a^2$.
Se raccogliamo a fattore comune a^2, otteniamo: $(2 + 5)a^2 = 7a^2$.
Il risultato è un monomio.
Invece, l'addizione $2a^2 + 5a$ non può essere semplificata in modo che il risultato sia un monomio.
Si ottiene un monomio solo quando i monomi addendi hanno la stessa parte letterale.

DEFINIZIONE
Monomi che hanno la stessa parte letterale si dicono **simili**.

ESEMPIO $3a^5$ e $4a^5$ sono simili; $5a^5$ e $5a^4$ non sono simili.

La somma o la differenza di due monomi è ancora un monomio solo se i monomi sono simili fra loro. In questo caso, per calcolare la somma, basta applicare la proprietà del raccoglimento a fattore comune.

Anche per i monomi, come per i numeri relativi, le operazioni di addizione e sottrazione possono essere indicate sinteticamente con *addizione algebrica* e il loro risultato con *somma algebrica*.

ESEMPIO Calcoliamo la somma algebrica di: $4a^2b + 6a^2b - 8a^2b =$
Raccogliamo la parte letterale a fattore comune: $(4 + 6 - 8)a^2b =$
Calcoliamo la somma algebrica dei coefficienti: $2a^2b$.

REGOLA
La **somma algebrica di** due o più **monomi simili** è un monomio che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti e la stessa parte letterale.

Due monomi simili sono **opposti** se sono opposti i loro coefficienti. Per esempio, $2a$ e $-2a$ sono monomi opposti. La somma di due monomi opposti è 0.

ESEMPIO
$$5ab + (-5ab) = 5ab - 5ab = (5 - 5)ab = 0.$$

Come per i numeri relativi, anche per i monomi la sottrazione può essere considerata come un'addizione con l'opposto del sottraendo.
La differenza fra due monomi è data dalla somma del primo con l'opposto del secondo.

La moltiplicazione di monomi

Consideriamo la moltiplicazione fra monomi: $2a^2 \cdot 7a^3$.
Applicando le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la prima proprietà delle potenze, otteniamo:

$$2a^2 \cdot 7a^3 = 2 \cdot 7 \cdot a^2a^3 = 14a^5.$$

▶ Sottolinea i monomi simili nel seguente gruppo. Per ogni monomio scrivi il suo opposto.

$-4a$; $\frac{1}{7}ax^2$; 2^3a; $-\frac{1}{2}a^2x$; $\frac{ax^2}{9}$.

▶ Calcola la somma e la differenza dei seguenti monomi.

- $-\frac{1}{2}xyz$; $-\frac{7}{4}xyz$
- $8a^2x$; $-23a^2x$
- $\frac{1}{3}x^3y$; $-\frac{2}{15}x^3y$
- $-10b^4y$; $\frac{7}{2}b^4y$

Prodotto fra monomi
Il prodotto di due o più monomi è un monomio in cui:
- il *coefficiente* è il prodotto dei coefficienti;
- nella *parte letterale* ogni lettera ha per esponente la somma degli esponenti con cui la lettera compare nei fattori.

Il prodotto di due monomi è sempre un monomio.

► Semplifica la seguente espressione:

$$\left(-\frac{2}{3}x^2y+\frac{4}{5}x^2y\right)\left(-\frac{5}{8}xy^3\right)(-12x^2y)+\left(-x^3y-\frac{1}{2}x^3y\right)(-x^2y^4)-x^4y^5.$$

Animazione

► Calcola i seguenti prodotti.
- $(-4x)(+2x)$
- $(+5y^2)(-2y)$
- $\left(-\frac{21}{8}a^4b^2c\right)\left(-\frac{40}{49}ab^4c^5\right)$

La potenza di un monomio

Per eseguire la potenza di un monomio si applicano le proprietà delle potenze relative alla potenza di un prodotto $(ab)^n = a^nb^n$ e alla potenza di potenza $(a^m)^n = a^{mn}$.

ESEMPIO
$(7a^3)^2 = 7^2(a^3)^2 = 49a^{3\cdot 2} = 49a^6$.

Potenza di un monomio
Per calcolare la potenza con esponente n di un monomio:
- eleviamo a esponente n il suo coefficiente;
- moltiplichiamo per n ognuno degli esponenti delle sue lettere.

ESEMPIO
$$\left(-\frac{3}{2}a^2b^5\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^3(a^2b^5)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^3a^{2\cdot 3}b^{5\cdot 3}=-\frac{27}{8}a^6b^{15}.$$

La potenza con esponente 0 di un monomio diverso da 0 è uguale a 1.

Per esempio: $(4x^3)^0 = 4^0x^{3\cdot 0} = 1$.

La potenza con esponente 1 di un monomio è uguale al monomio stesso.

Per esempio: $(11y^4)^1 = 11^1 \cdot y^{4\cdot 1} = 11y^4$.

► Calcola le seguenti potenze di monomi.
$(-2a^3bc^2)^2$; $(5xy^5)^3$; $\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3$; $-(-4x^3yt)^2$; $-\left(\frac{1}{3}a^2bc^3\right)^4$.

La divisione fra due monomi

Consideriamo la divisione fra monomi: $4a^2b^3 : 2b^2$.
Applicando la proprietà invariantiva della divisione e la proprietà commutativa della moltiplicazione, $mx : ny = (m : n) \cdot (x : y)$, possiamo eseguire la divisione fra i coefficienti e la divisione fra le parti letterali: $(4 : 2)(a^2b^3 : b^2)$.
Utilizzando poi la seconda proprietà delle potenze, $a^m : a^n = a^{m-n}$, si ottiene:

$$(4 : 2)(a^2b^3 : b^2) = 2a^2b^{3-2} = 2a^2b.$$

Il risultato è ancora un monomio.

Ripetiamo le stesse operazioni in un altro caso:

$$4a^2b^3 : (2b^5) = (4 : 2)(a^2b^3 : b^5) = 2a^2b^{3-5} = 2a^2b^{-2}.$$

Il risultato non è un monomio, perché l'esponente di b è negativo.

Divisibilità fra monomi

Un monomio (dividendo) è **divisibile** per un altro monomio (divisore) quando in esso compaiono tutte le lettere del divisore, ognuna con esponente maggiore o uguale a quello con cui compare nel divisore. In questo caso si dice che il monomio dividendo è *multiplo* del monomio divisore.

Il monomio divisore non può essere il monomio nullo. Per esempio, la divisione $3a^2b : 0$ non ha significato.

Listen to it

A **monomial** P is **divisible** by a second monomial Q if and only if the letters in P are all raised to a power *greater or equal* to the corresponding powers in Q.

Quoziente fra monomi
Dati i monomi A e B, con A divisibile per B e $B \neq 0$, il quoziente di A diviso B è un monomio in cui:

- il *coefficiente* è il quoziente dei coefficienti;
- nella *parte letterale* ogni lettera ha per esponente la differenza tra gli esponenti con cui la lettera compare in A e B.

ESEMPIO

$$6a^5b^4 : (5a^3b) = (6 : 5)(a^5 : a^3)(b^4 : b) = \frac{6}{5}a^{5-3}b^{4-1} = \frac{6}{5}a^2b^3.$$

È possibile dividere un monomio per un qualunque numero (*diverso da* 0).

ESEMPIO

$$\frac{3}{2}a : 5 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)a = \frac{3}{10}a.$$

Un numero, infatti, è un particolare monomio in cui la parte letterale ha esponente 0.

▶ Calcola quando esiste il monomio quoziente delle divisioni fra monomi.

- $12a^3b : (-4ab)$; $15x^3y^2 : (3x^4y)$
- $3ab^5c^2 : (2ab^2c^2)$; $5a^4xy^7 : (7a^2xy^5)$

▶ Guarda il video sulle operazioni fra monomi e fornisci esempi per spiegare perché nell'insieme dei monomi la moltiplicazione e la potenza sono operazioni interne, mentre l'addizione e la divisione non lo sono.

Video

▶ Semplifica la seguente espressione:

$$\left(-\frac{3}{2}a^2x^3\right)^3 : \left(\frac{3}{2}ax^3\right)^2 - (-2a^3x^2)^3 : \left(\frac{4}{9}a^5x^5\right)\left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}a\right)^3.$$

Animazione

3 Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo fra monomi

▶ Esercizi a p. 295

I concetti di massimo comune divisore e minimo comune multiplo che abbiamo visto per i numeri naturali si possono estendere anche ai monomi. Esaminiamo le regole che servono per calcolarli.

Il massimo comune divisore

Il **massimo comune divisore** (**MCD**) di due o più monomi è un monomio che ha:

- come *coefficiente*
  - il MCD dei valori assoluti dei coefficienti, se sono tutti interi,
  - il numero 1 se qualche monomio non ha coefficiente intero;
- come *parte letterale* il prodotto delle lettere comuni a tutti i monomi, ognuna presa una sola volta e con l'esponente minimo.

Listen to it

The **greatest common factor** (**GCF**) of two or more monomials is a monomial that has the *highest* possible degree among all the factors of the monomials.

ESEMPIO Troviamo il MCD di $\frac{3}{2}x^4y^2c$, $\quad x^6y$, $\quad \frac{2}{5}x^3y^3c^4$.

Poiché non tutti i monomi hanno coefficiente intero, il coefficiente del MCD è uguale a 1. Mettiamo le lettere in colonna:

$$\begin{array}{lll} x^4 & y^2 & c \\ x^6 & y & \\ x^3 & y^3 & c^4. \end{array}$$

La lettera c non può comparire nel MCD perché non è comune a tutti e tre i monomi; nella colonna delle x, x^3 ha l'esponente minimo; nella colonna delle y, y ha l'esponente più piccolo. Il MCD è x^3y.

► Calcola il MCD dei seguenti monomi.
- $15abc$, $\quad 6b^4$, $\quad 9bc^5$
- $-2x^2y^2$, $\quad 16xy^4$, $\quad 4yz$

Il minimo comune multiplo

Il **minimo comune multiplo** (**mcm**) di due o più monomi è un monomio che ha:

- come *coefficiente*
  - il mcm dei valori assoluti dei coefficienti, se sono tutti interi,
  - il numero 1 se qualche monomio non ha coefficiente intero;
- come *parte letterale* il prodotto di tutte le lettere presenti in almeno uno dei monomi, ognuna presa una sola volta e con l'esponente massimo.

Listen to it

The **least common multiple** (**lcm**) of two or more monomials is a monomial that has the lowest possible degree among the monomials that are divisible by all of the original monomials.

ESEMPIO Troviamo il mcm di $\frac{3}{2}x^4y^2c$, $\quad x^6y$, $\quad \frac{2}{5}x^3y^3c^4$.

Il coefficiente è uguale a 1. Mettiamo le lettere in colonna:

$$\begin{array}{lll} x^4 & y^2 & c \\ x^6 & y & \\ x^3 & y^3 & c^4. \end{array}$$

Nel mcm devono comparire tutte le lettere, ognuna con l'esponente più alto, perché il monomio ottenuto deve essere multiplo di tutti gli altri. Il mcm è $x^6y^3c^4$.

► Calcola il mcm dei seguenti monomi.
- $2a^3x$, $\quad -ax^3y$, $\quad 3y^2t$
- $\frac{1}{4}p^2$, $\quad 8pq$, $\quad 12q^4$

► Calcola il MCD e il mcm dei seguenti monomi.

a. $-10x^3y^5$; $\quad 2x^4y$; $\quad -4x^2y^3$.

b. $\frac{4}{3}a^{10}b^8c^6$; $\quad 8a^4b^2$; $\quad 12a^6b^6c^6$.

Animazione

IN SINTESI
I monomi

Che cosa sono i monomi

Un **monomio** è un'espressione letterale in cui compaiono soltanto moltiplicazioni fra numeri e potenze di lettere con numeri naturali per esponenti. Perciò, fra le lettere, **non compaiono addizioni, sottrazioni o divisioni**.

$\frac{3a^4}{2}$ **è un monomio** $\quad$ $\frac{4a^3}{b^2}$ **non è un monomio**

Un monomio in **forma normale** è scritto come prodotto fra un numero (il **coefficiente**) e una o più lettere diverse fra loro, con i relativi esponenti (la **parte letterale**).
Il **grado** di un monomio **rispetto a una lettera** è l'esponente che la lettera ha nel monomio.
Il **grado** (complessivo) **di un monomio** è la somma dei gradi rispetto a tutte le lettere del monomio.

Le operazioni con i monomi

Due monomi sono **simili** quando hanno la stessa parte letterale. Due monomi sono **opposti** se sono simili e hanno coefficienti opposti.
La **somma** o la **differenza** di due monomi simili è un monomio che si ottiene *sommando algebricamente i coefficienti e lasciando invariata la parte letterale*.

ESEMPIO $9a + 3a - 2a = (9 + 3 - 2)a = 10a$

Il **prodotto** di due o più monomi è un monomio in cui il coefficiente è il prodotto dei coefficienti, e la parte letterale è uguale al prodotto delle lettere ciascuna con esponente uguale alla somma degli esponenti con cui compare nei fattori.

ESEMPIO $3a^2 \cdot (4ab^3) = (3 \cdot 4)(a^{2+1}b^3) = 12a^3b^3$

Il **quoziente** di due monomi, con il divisore diverso da zero, è un monomio in cui il coefficiente è il quoziente dei coefficienti, e la parte letterale è uguale al prodotto delle lettere ciascuna con esponente uguale alla differenza degli esponenti con cui compare nei due monomi.

ESEMPIO $12a^{12} : (3a^3) = (12 : 3)a^{12-3} = 4a^9$

Per calcolare la **potenza**, con esponente un numero n, di un monomio si eleva a n il coefficiente e si moltiplica per n l'esponente di ciascuna lettera.

ESEMPIO $(5x^2y)^3 = 5^3x^{2\cdot 3}y^3 = 125x^6y^3$

MCD e mcm fra monomi

- La parte letterale del **massimo comune divisore** (**MCD**) fra monomi è il prodotto delle sole *lettere comuni* a tutti i monomi, ognuna presa una sola volta e *con l'esponente minimo*.
- La parte letterale del **minimo comune multiplo** (**mcm**) fra monomi è il prodotto di *tutte le lettere* presenti in almeno uno dei monomi, ognuna presa una sola volta e *con l'esponente massimo*.
- Il coefficiente è rispettivamente il MCD e il mcm dei valori assoluti dei coefficienti, se sono tutti interi; in caso contrario, il coefficiente è 1.

ab^2	a	b^2	
a^2b	a^2	b	
abc^3	a	b	c^3

MCD = ab
lettere comuni con l'esponente minimo

mcm = $a^2b^2c^3$
tutte le lettere con l'esponente massimo

CAPITOLO 6
ESERCIZI

1 Che cosa sono i monomi

▶ Teoria a p. 268

1 **SPIEGA PERCHÉ** L'espressione $\frac{2m}{n}$ non è un monomio, mentre $\frac{2m}{3}$ lo è. Perché?

2 **TEST** Fra le seguenti espressioni solo una rappresenta un monomio. Quale?

A $\frac{3ab}{x}$ **B** 2 **C** $x-2$ **D** $2ab^{-1}$ **E** $-xy+a$

VERO O FALSO?

3
a. Il prodotto tra un numero e una lettera è un monomio. V F
b. Il coefficiente del monomio $-2xy$ è il numero 2. V F
c. Nel monomio ax^2y^3 il coefficiente è 0. V F
d. Un monomio non può avere lettere con esponenti negativi. V F

4
a. Il monomio a^3 non ha coefficiente. V F
b. L'espressione $\frac{3}{4}a^2b$ non è un monomio. V F
c. Un monomio ha sempre il coefficiente intero. V F
d. Qualunque numero è un monomio. V F

Indica quali espressioni sono monomi e spiega perché hai escluso le altre espressioni.

5 $3^{-2}a^2b^3x$; $\quad 4a^2xy^{-1}$; $\quad a^0b^0x^0$; $\quad 0x^2y^2$; $\quad 0a$.

6 $\frac{ax}{2}$; $\quad \frac{x}{2}$; $\quad \frac{1}{3}a$; $\quad \frac{3}{a}$; $\quad \frac{2}{ax}$.

7 ab^2; $\quad -4ab$; $\quad -2a^{-2}b$; $\quad (x+z)^3$; $\quad 4^{-3}x^2y^2$.

8 $b(-y)z$; $\quad a-bz$; $\quad (a-b)\cdot 2$; $\quad \frac{a+2}{3}$; $\quad \frac{a}{3}$.

La riduzione a forma normale

9 **ESERCIZIO GUIDA** Riduciamo a forma normale il monomio: $a^4b\left(-\frac{1}{2}\right)^3a^2\left(\frac{5}{2}\right)b^3(-4)a^2$.

Eseguiamo le operazioni fra i numeri.

Applichiamo la proprietà commutativa e la proprietà associativa della moltiplicazione, in modo da avvicinare i coefficienti e le lettere uguali fra loro: $\left(-\frac{1}{8}\right)\left(+\frac{5}{2}\right)(-4)a^4a^2a^2bb^3 =$

Calcoliamo il coefficiente come prodotto dei valori numerici e per ogni lettera applichiamo la prima proprietà delle potenze $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, sommando gli esponenti: $+\frac{5}{4}a^8b^4$.

Riduci a forma normale i seguenti monomi.

10 $2a^2bx^2\frac{1}{2}ax^4\left(-\frac{4}{3}b\right)$; $\quad \left(-\frac{1}{4}x^2\right)(-3)xy^3 2y^2$.

11 $\frac{a}{2}yc^3\left(-\frac{1}{5}\right)by^2a^2$; $\quad 4a^3\left(-\frac{1}{4}\right)a^4 2(-a^8)$.

Riduci a forma normale i seguenti monomi indicandone poi la parte letterale e il coefficiente.

12 $\frac{6}{5}a\left(-\frac{10}{3}\right)ca^2x^2\left(-\frac{1}{2}\right)a^4$; $\quad -1abxa^2b^3 3x$.

13 $-\frac{6}{7}a\frac{7}{2}x^2$; $\quad 1{,}\overline{3}a^2x^2yxy^2\left(-\frac{3}{4}\right)a$.

14 $-\frac{1}{3}b^2c3^0bc^3$; $\quad \left(-\frac{1}{5}\right)ab\frac{15}{2}b^2\left(-\frac{2}{3}\right)^2a$.

15 $0{,}\overline{3}a\left(-\frac{3}{2}\right)^2a^2ab$; $\quad (-2)x^3\left(-\frac{1}{4}\right)x^2xx^4(-2)^3$.

ESERCIZI

Il grado di un monomio

16 TEST Fra le seguenti espressioni, solo una rappresenta un monomio di terzo grado. Quale?

A $5x^2yx^3$

B $2abx^2$

C $-2x^{-3}$

D abc

E $2ax^2y$

17 VERO O FALSO?

a. Il grado del monomio $2^3a^2b^4$ è 6. V F

b. Nel monomio $5xy^2$ il grado rispetto a x è 1. V F

c. Nel monomio $2x^2y^3$ il grado rispetto alla lettera z è 0. V F

d. Il grado di un monomio è il prodotto degli esponenti delle lettere. V F

Per i seguenti monomi indica il coefficiente, la parte letterale, il grado complessivo e il grado rispetto a ciascuna lettera.

18 $3^2b^7a^3c$; 2^2abd^4; $-3b^4c^2d^6$; $\frac{3}{7}a^5b$.

19 12; $24cd$; $-\frac{12}{5}c^3d^4$; $8abcd$.

20 $3xy^4$; $-2^2x^2y^3$; $-5ab^2x^3$.

21 ESEMPIO DIGITALE $9^2x^2y^4$; $-\frac{yz}{2}$; $7z^7$; $3xyz^2$; $4y^3z^3$; 25.

22 Usando le lettere x e y, scrivi tutti i possibili monomi di quarto grado con coefficiente -3.

23 Scrivi due monomi di grado complessivo 6 che siano di terzo grado rispetto alla lettera x e di primo grado rispetto alla lettera y.

2 Le operazioni con i monomi

Teoria a p. 270

Monomi simili, opposti, uguali

24 TEST Fra le seguenti espressioni solo una è un monomio simile a $-2ab^3c^2$. Quale?

A $5a^2bc^3a$ B $2abc^2b$ C $-2x^3$ D $+3abcb^2c$ E $+2ab^2c^3$

25 Che cosa manca al monomio $-\frac{8}{3}ab$ per essere simile a $\frac{2}{3}a^3b$?

26 VERO O FALSO?

a. I monomi $2a$ e $-3a$ sono simili. V F

b. Due monomi simili sono uguali. V F

c. Due monomi simili hanno gradi diversi. V F

d. Due monomi opposti sono simili. V F

27 SPIEGA PERCHÉ I monomi a^n e a^{2n} sono simili? Perché? E a^n e b^n?

Individua i monomi simili nei seguenti gruppi.

28 xy^3; $-\frac{1}{3}axz^2$; $-2y^3x$; $-az^2x$; $\frac{1}{2}xy^2$.

29 $-\frac{1}{2}a^2b$; $-bx^2$; $\frac{1}{4}ba^2$; $\frac{2}{3}x^2b$; $-12a^2x^2$.

30 $5a^n$; $-3a^{2n}$; $6a^n$; b^{2n}; $-\frac{1}{3}a^{2n}$, con $n \in \mathbb{N}$.

31 ●○ TEST Sono dati due monomi opposti. Una soltanto delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

A La loro somma esiste, la loro differenza non esiste.

B La loro somma e la loro differenza sono entrambe uguali al monomio nullo.

C La loro differenza è uguale al doppio del monomio sottraendo e la loro somma è uguale al monomio nullo.

D La loro somma è uguale a 1, la loro differenza è uguale al monomio nullo.

E La loro differenza è il doppio del monomio minuendo, la loro somma è uguale al monomio nullo.

32 ●○ SPIEGA PERCHÉ la somma di due monomi di primo grado non sempre è un monomio di primo grado.

33 ●○ TEST L'opposto del monomio $3^{-2}ab$ è:

A $-\frac{1}{9}ab$. B $-3ab$. C $3^2a^{-1}b^{-1}$. D $\frac{1}{3^2ab}$. E $-\frac{1}{9}a^{-1}b^{-1}$.

Tra i seguenti monomi stabilisci quali sono opposti e quali sono uguali.

34 ●○ xy; $(-3)^0xy$; $(-1)xy$; $(-1)^5xy$.

35 ●○ $2ax^2$; $(-2)^0ax^2$; $2a(-x)^2$; $-\frac{2}{3^0}ax^2$.

36 ●○ $(-3)^2a^2b^3$; $9(-a)^2(-b)^3$; $(-2)^3a^2b^3$.

37 ●○ a^2b; $(-a^2)(-b)$; $(-3^0)a^2(-b)$; $(-a)^2(-b)$.

38 ●○ $3a^0x$; $3x$; $-3xy^0$; $\frac{1}{3}x$.

L'addizione e la sottrazione di monomi

39 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo le seguenti addizioni algebriche di monomi:

a. $3y+\frac{2}{5}y-y+17y-\frac{2}{5}y$; **b.** $2a-b+\frac{7}{2}b+a-\frac{1}{2}b$;

c. $2a^nb^{2m}-(-3a^2b^m)+2a^nb^{2m}-3a^2b^m+a^2b^m$ (con $n, m \in \mathbb{N}$).

---

a. $3y+\frac{2}{5}y-y+17y-\frac{2}{5}y=$

Tutti i monomi presenti sono simili tra loro. Cancelliamo i monomi opposti, la cui somma è 0:

$$3y+\cancel{\frac{2}{5}y}-y+17y-\cancel{\frac{2}{5}y}=$$

Raccogliamo la parte letterale e calcoliamo il coefficiente (facciamo attenzione a non dimenticare il coefficiente -1):

$$(3-1+17)y=19y.$$

b. $2a-b+\frac{7}{2}b+a-\frac{1}{2}b=$

Segniamo in modo diverso i monomi simili fra loro:

$$\underline{2a}-\underline{b}+\underline{\frac{7}{2}b}+\underline{a}-\underline{\frac{1}{2}b}=$$

Raccogliamo la parte letterale.

Quando introduciamo una parentesi, mettiamole sempre davanti il segno +, evitando così di sbagliare i segni:

$$(2+1)a+\left(-1+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)b=3a+2b.$$

Il risultato non è un monomio, poiché contiene un'addizione di monomi non simili.

c. Procediamo come se gli esponenti fossero numeri. Eliminiamo la parentesi e sottolineiamo i monomi simili fra loro:

$$\underline{2a^nb^{2m}}+\underline{3a^2b^m}+\underline{2a^nb^{2m}}+$$
$$-\underline{3a^2b^m}+\underline{a^2b^m}=$$

Raccogliamo a fattore comune:

$$(2+2)a^nb^{2m}+(3-3+1)a^2b^m=$$
$$4a^nb^{2m}+a^2b^m.$$

Il risultato non è un monomio, perché contiene un'addizione di monomi non simili.

Esegui le seguenti addizioni algebriche di monomi.

40 $9x + 5x - 10x + x$ $[5x]$

41 $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}a + \frac{4}{3}a - a + 5a$ $\left[\frac{29}{6}a\right]$

42 $-ab + 4ab - 12ab + \frac{1}{3}ab + 2ab$ $\left[-\frac{20}{3}ab\right]$

43 $\frac{3}{4}b^3 - 0{,}2b^3 - 1{,}5b^3 + \frac{1}{5}b^3$ $\left[-\frac{3}{4}b^3\right]$

44 $-\frac{1}{4}a + 2b^2 + 6a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b^2 - 6a$ $\left[-\frac{3}{4}a + \frac{7}{3}b^2\right]$

45 $\frac{5}{6}ab - \frac{1}{2}a + 2ab - \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a - ab$ $\left[\frac{11}{6}ab - \frac{1}{3}a\right]$

46 $5x^2 - 7x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 8x^2 - \frac{3}{8}x^2 - x^2 + \frac{9}{8}x^2$ $[-10x^2]$

47 $-\frac{1}{2}y + y - \left(-\frac{1}{4}y\right) - (7y) + \frac{3}{4}y$ $\left[-\frac{11}{2}y\right]$

48 $-\frac{1}{4}xy + 3x^2 + 5y - \frac{1}{2}xy - \frac{3}{2}x^2 - 5y$ $\left[-\frac{3}{4}xy + \frac{3}{2}x^2\right]$

49 ESEMPIO DIGITALE $xy - \left(y - \frac{1}{2}y\right) - (-xy) + \left(\frac{1}{2}x + x\right) - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}x - (2xy)$

50 $\frac{3}{2}x^3y^2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}xy - x^3y^2 - 3 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}x^3y^2 + 2xy$ $\left[x^3y^2 - \frac{5}{2}\right]$

51 $3a^2 - 5b^2 - 5b^2 - 3a^2 + \frac{19}{2}b^2 + \frac{5}{3}a^2 - 2a^2 + 4b^2 + \frac{1}{3}a^2 - \frac{5}{2}b^2$ $[b^2]$

52 $2a^2 - (-3a^2) + (-5a^2) - a - (-a)$ $[0]$

53 $-\left[4a^2b + \frac{1}{2}a^2b - \left(-\frac{1}{2}a^2b\right)\right] + 5a^2b - 3ab^2$ $[-3ab^2]$

COMPLETA inserendo il monomio mancante in modo che l'uguaglianza risulti vera.

54 $-7a + 10a + 15a + \square = -4a$

55 $3xy - 5xy + \square + \frac{1}{3}xy = \frac{2}{3}xy$

56 $6a^3b^4 + \square = -5a^3b^4$

57 $\square - 3ab^5 + 5ab^5 = 0$

58 $\frac{3}{4}a^4b^2 - \square = 0$

59 $\frac{7}{2}a^3 + \square + a^3 = \frac{14}{5}a^3$

60 $-\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}x^2y + \square = \frac{7}{6}x^2y$

61 $\frac{3}{4}x^2y^3 - \square = \frac{1}{2}x^2y^3$

62 ESERCIZIO GUIDA Dati i monomi $A = \frac{3}{4}a^2b$ e $B = -\frac{1}{2}a^2b$, semplifichiamo le espressioni $A + B$ e $A - B$.

Sostituiamo alle lettere A e B i monomi. Se un monomio è preceduto dal segno di operazione, scriviamo il monomio fra parentesi:

$$A + B = \frac{3}{4}a^2b + \left(-\frac{1}{2}a^2b\right) =$$

Togliamo le parentesi:

$$\frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{2}a^2b = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)a^2b = \frac{1}{4}a^2b.$$

$$A - B = \frac{3}{4}a^2b - \left(-\frac{1}{2}a^2b\right) =$$

Togliamo le parentesi:

$$\frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}a^2b = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)a^2b = \frac{5}{4}a^2b.$$

Semplifica le seguenti espressioni, dove *A*, *B* e *C* sono i monomi:

$$A=\frac{1}{2}x^2y;\quad B=-2x^2y;\quad C=-\frac{1}{3}x^2y.$$

63 $-(A+B);\ A-C.$ **64** $[(A+B)-C]-A+C.$ **65** $B-(B-A)-A;\ B+C-2A.$

La moltiplicazione di monomi

66 VERO O FALSO?

a. Il prodotto fra due monomi è sempre un monomio. V F

b. Moltiplicando un monomio per una frazione non si ottiene un monomio. V F

c. Il monomio prodotto di più monomi ha come grado la somma dei gradi dei monomi. V F

d. Il prodotto di due monomi di primo grado è un monomio di primo grado. V F

67 TEST Quale delle seguenti espressioni è equivalente al monomio $-24a^2b^2x$?

A $6ab\cdot(-2bx)\cdot(3ab)$

B $\frac{2}{3}a^2b^2\cdot(-36x)$

C $3a\cdot\left(-\frac{2}{3}bx\right)\cdot(12a)$

D $2a\cdot\left(-\frac{3}{2}ab\right)\cdot(-12x)$

E $4a^2b\cdot\left(\frac{4}{3}b^2\right)\cdot(6x)$

68 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo la seguente moltiplicazione:

$$\left(-\frac{3}{4}a^3b^2\right)\cdot(-2ab^3)\cdot\left(+\frac{4}{3}a^2\right).$$

Per procedere rapidamente, svolgiamo i calcoli a mente, distinguendo le tre regole da applicare:

1. Calcoliamo il segno.
2. Moltiplichiamo i valori assoluti dei coefficienti.
3. Sommiamo gli esponenti di ciascuna lettera.

$$(-\cdot-\cdot+)\left(\frac{3}{4}\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\right)a^{3+1+2}b^{2+3}=+2a^6b^5.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni di monomi.

69 $2a^2\cdot(-4a^5b^3);\qquad -4xy^3\cdot\frac{1}{2}x^3y^2.$ $[-8a^7b^3;-2x^4y^5]$

70 $-\frac{3}{4}a^3b^4c\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^2c^5\right);\qquad \frac{10}{7}ab^5c^7\cdot\frac{7}{5}a^2b^5c.$ $\left[+\frac{3}{8}a^4b^6c^6;\ 2a^3b^{10}c^8\right]$

71 $-2a^2\cdot(-3a^5b^3)\cdot\frac{1}{2}a^2;\qquad -4a^5b^3\cdot(-ab^3)\cdot\frac{3}{2}a^2b^2.$ $[+3a^9b^3;\ 6a^8b^8]$

72 $-\frac{3}{4}a^3b^4c\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^2c^5\right)\cdot 10ab^2c^5\cdot\frac{1}{5}a^3b^2c$ $\left[+\frac{3}{4}a^8b^{10}c^{12}\right]$

73 $2a^2\cdot(-2a^4b^2)\cdot\left(-\frac{3}{4}a^3b^5c\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab^2c^5\right)\cdot 4ab^5c^7$ $[-6a^{11}b^{14}c^{13}]$

74 $-3a^2x\cdot\left(\frac{5}{6}x^2a^2\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}a^2x^4\right)\cdot\left(-\frac{5}{8}ab^2x\right)$ $\left[-\frac{5}{8}a^7b^2x^8\right]$

75 ESEMPIO DIGITALE $(-1{,}2x^8)\left(-\frac{5}{4}x^4\right)(2x^3);\qquad (-2k^3)\left(\frac{1}{10}k\right)(1{,}5k^8).$

76 $\frac{1}{4}b\cdot(-8a^3b^4)\cdot 3a^0\cdot\frac{5}{4}a^2b\cdot\left(-\frac{1}{5}a\right)$ $\left[\frac{3}{2}a^6b^6\right]$

ESERCIZI

77 $\frac{4}{7}b^3\cdot(-0,\bar{7}a^3b)\cdot(-ab^3)\cdot\left(+\frac{3}{2}a^2b^2\right)$ $\left[+\frac{2}{3}a^6b^9\right]$

78 $\frac{5}{11}xy\cdot(-0,2x^3)\left(\frac{11}{3}x^2y^2\right)\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)\cdot 1,\bar{3}x$ $\left[\frac{2}{9}x^8y^6\right]$

COMPLETA le seguenti tabelle di moltiplicazione.

79

$\cdot$	$-a$	$3b$
$2a$		
$-\frac{1}{2}y$		

80

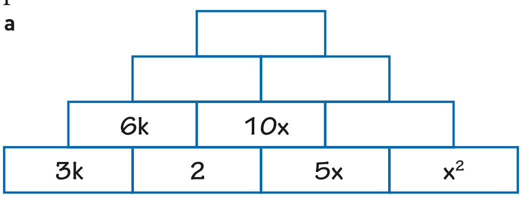
$\cdot$	-2	$-x$	$+2y$
-3			
$-4x$			
$\frac{1}{2}y$			

81

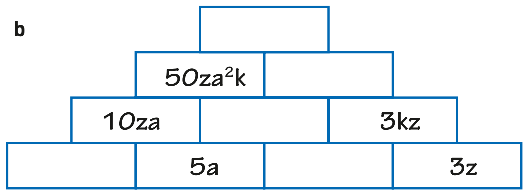
$\cdot$	a	-4	$-b^2$
$-\frac{1}{4}$			
ab			
a^2			

82 **YOU & MATHS** **Pyramids of products** Complete the pyramids below so that each box contains the product of the two boxes below it that touch it.

a



b



COMPLETA inserendo il monomio mancante in modo che l'uguaglianza sia vera.

83 $2a\cdot\square=-8a^2b^2$

84 $\square\cdot 3s^2t^4=12s^3t^5$

85 $4a^6b^8\cdot\square=\frac{1}{2}a^8b^{12}$

86 $4a^2\cdot(-2)\cdot\square=-5a^3$

87 $(3a^5b^2)\square=9a^{10}b^4$

88 $2ab\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)\cdot\square=a^4b^3$

89 $3xy^2\cdot\left(-\frac{1}{5}xy^2\right)\cdot\square=-3x^5y^5$

90 $\square\cdot(-6a^2b)\left(-\frac{1}{4}ab\right)=9a^4b^5$

91 $-2xy\cdot\left(\frac{2}{3}xy\right)\cdot\square=-\frac{1}{2}x^7y^5$

92 $\left(-\frac{1}{3}x^2y^2\right)(6x)\cdot\square=8x^6y^8$

93 $\left(-\frac{7}{3}a^2b\right)(-x^2y^2)\cdot\left(\frac{3}{5}ab^2\right)\cdot\square=a^3b^4x^2y^3$

94 $\frac{3}{10}c^3x^3y^2\cdot\square=\left(-\frac{13}{3}cx^3y\right)\cdot\left(\frac{1}{30}c^2y\right)$

La semplificazione di espressioni con somme e prodotti di monomi

95 **ESERCIZIO GUIDA** Semplifichiamo la seguente espressione: $\left(\frac{3}{8}ab\right)\left(-\frac{4}{3}a\right)(-6b)+b^2\left(\frac{1}{2}a\right)-ab^2$.

L'espressione è la somma algebrica di tre termini formati da prodotti di monomi:

$$\boxed{\left(\frac{3}{8}ab\right)\left(-\frac{4}{3}a\right)(-6b)}+\boxed{b^2\left(\frac{1}{2}a\right)}-\boxed{ab^2}=$$

Eseguiamo le moltiplicazioni fra i monomi di ciascun termine:

$$+\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\cancel{6}^{3}\right)a^2b^2+\frac{1}{2}ab^2-ab^2=$$

Calcoliamo i coefficienti ed evidenziamo i monomi simili:

$$3a^2b^2+\underline{\frac{1}{2}ab^2}-\underline{ab^2}=$$

Sommiamo i monomi simili:

$$3a^2b^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)ab^2=3a^2b^2-\frac{1}{2}ab^2.$$

Il risultato non è un monomio ma la somma di due monomi.

Semplifica le seguenti espressioni.

96 $a^2x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)+\left(\frac{1}{2}ax\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)-\frac{2}{3}a^2x^2$ $\left[-\frac{1}{6}a^2x^2+\frac{1}{3}a^2x\right]$

97 $(-2x)\left(-\frac{1}{2}y\right)+(-2y)x+xy+y(-x)+2xy+y(-x)$ $[0]$

98 $x^2+7x^2-2(-x^2)-2x^2+2(-4)x^2+2x^2+x^2-x(2x)+4x^2-2(2x^2)$ $[x^2]$

99 $2x^2y^2(3x^2y^2)-(-xy)(5x^3y^3)-(-4x^2y^2)2x^2y^2-7x^4y^4$ $[12x^4y^4]$

100 $-\frac{7}{2}x(-x^2)+(-x)\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{4}{5}x^2(-5x)+x^3$ $[x^3]$

101 $\left(x^2+\frac{2}{5}x^2\right)\cdot a+\left(a-\frac{13}{5}a\right)\left(\frac{7}{8}x^2-x^2\right)$ $\left[\frac{8}{5}ax^2\right]$

102 $\frac{1}{2}a^2(-4b)-\left(-\frac{7}{6}a^2b\right)(ab)-\frac{1}{3}a(-a^2b)\frac{5}{2}b-\frac{a}{4}(-2ab)$ $\left[-\frac{3}{2}a^2b+2a^3b^2\right]$

103 ESEMPIO DIGITALE $\left(-1-\frac{1}{4}\right)ab^2-\left(-\frac{1}{2}a\right)(+b^2)+\left(-3-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{7}ab^2\right)+\left(-\frac{1}{4}b\right)(-3ab)-2ab^2$

104 $\frac{2}{3}ab\cdot(-2a^2b)-\left(-\frac{1}{6}a^3\right)\cdot b^2+\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)3a+\frac{3}{4}a^2b\cdot(2b)$ $\left[-\frac{7}{6}a^3b^2\right]$

105 $3,5x\left(\frac{1}{7}bx^2\right)+3b(-x^3)-x^2b\left(-\frac{1}{2}x\right)+\left(-\frac{1}{2}x^2\right)(-xb)$ $\left[-\frac{3}{2}bx^3\right]$

106 $(+y^4)-3y(-y^3)+6xy(-x^3y^3)-4xy^3\left(-\frac{3}{2}x^3y\right)$ $[4y^4]$

107 ESEMPIO DIGITALE $2x^2-2x^2\left(\frac{1}{4}ax-\frac{3}{2}ax\right)+4\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x\right)(4x)+\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(2ax^2-\frac{7}{8}ax^2\right)$

108 $\left(-\frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{6}{5}y\right)-\frac{4}{5}xy+\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{4}xy\right)+xy-2xy$ $\left[-\frac{3}{2}xy\right]$

109 $x^4y^2-\left(-\frac{5}{4}x^3y\right)\left(-\frac{1}{5}xy\right)+8x^3\left(-\frac{1}{8}xy^2\right)-\frac{3}{2}x^4y^2$ $\left[-\frac{7}{4}x^4y^2\right]$

110 $3(-x^2y)\left(-\frac{1}{2}\right)-2x^2(2y)+(-y)(2x^2)+x^2y\left(1-\frac{3}{4}\right)$ $\left[-\frac{17}{4}x^2y\right]$

111 $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x^2y\right)+\left(-\frac{1}{5}xy\right)\left(\frac{5}{2}x\right)+\frac{1}{2}x^2y-x^2y+2x^2y$ $\left[\frac{3}{2}x^2y\right]$

112 $x^2-\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{2}{3}x\right)+\left(\frac{1}{5}x\right)\left(-\frac{5}{2}x\right)-x^2+\frac{2}{3}x^2+x^2\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\left[-\frac{1}{4}x^2\right]$

113 $\left(-\frac{5}{2}b\right)(-b^2)+\left(-\frac{4}{3}b^2\right)\left(\frac{5}{2}b\right)+\frac{3}{2}b(b^2)+\left(-\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{3}{2}b\right)+\left(-\frac{1}{2}b^2\right)\left(\frac{5}{2}b\right)+b^3$ $\left[-\frac{1}{12}b^3\right]$

114 $\frac{4}{3}xy^2+(-y^2)\left(\frac{4}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)(xy^2-2xy^2)+2xy^2+\left(-\frac{1}{3}\right)2xy^2+\frac{2}{3}xy^2+xy^2$ $\left[\frac{10}{3}xy^2\right]$

115 $\frac{2}{5}x^2\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)+\left(1-\frac{2}{5}\right)x^3y^3-\left(-\frac{2}{3}xy\right)\left(-\frac{3}{10}x^2y^2\right)-2x^3y^3$ $\left[-\frac{9}{5}x^3y^3\right]$

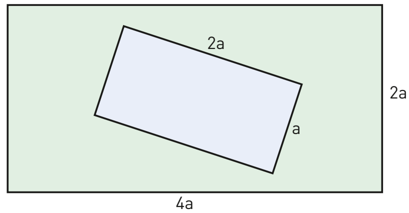
116 $\frac{1}{2}x^4+\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\left(\frac{9}{4}x^2\right)+\left(\frac{2}{9}x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2\right)-\left(-\frac{9}{4}x^2\right)\left(\frac{3}{2}x^2\right)+\left(-\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{9}{4}x^3\right)-\frac{3}{4}x^4$ $\left[-\frac{2}{3}x^4\right]$

117 YOU & MATHS **Represent this** A piece of rope is cut into two pieces: one piece is $\frac{3}{2}$ the length of the second piece. Represent the total length of the rope with a monomial with an integer coefficient.

ESERCIZI

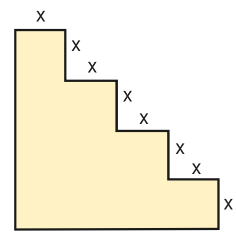
118 INVALSI 2011 In un prato (rettangolo più grande) è stata costruita una piscina (rettangolo più piccolo) come vedi in figura.
La superficie di prato rimasta è:

A $8a^2$. B $6a^2$. C $9a$. D $3a$.



119 INVALSI 2004 Indicando con A l'area e con P il perimetro della figura a lato: quale tra le seguenti coppie di uguaglianze è *vera*?

A $A = 13x^2$; $P = 16x$.
C $A = 36x^2$; $P = 14x$
B $A = 10x^2$; $P = 16x$.
D $A = 10x^2$; $P = 14x$.



120 EUREKA! **Uno e uno solo** Esiste un monomio A tale che la seguente uguaglianza sia verificata?
$\frac{2}{3}x^2y^3 + 2x^2y^3 = \frac{1}{7}xy \cdot A + \frac{5}{7}xy \cdot A$. In caso affermativo, tale monomio è unico?

La potenza di un monomio

SPIEGA PERCHÉ

121 Non esiste alcun monomio che elevato al quadrato dia come risultato il monomio $4x^3y^2$. Perché?

122 Qualsiasi monomio elevato a 0 non ha parte letterale. Perché?

123 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo la seguente potenza di un monomio:

$(-3a^3)^2$.

Applichiamo la terza proprietà delle potenze, $(ab)^n = a^n b^n$:

$(-3a^3)^2 = (-3)^2(a^3)^2 =$

Calcoliamo il coefficiente e applichiamo la quinta proprietà delle potenze, $(a^m)^n = a^{mn}$:

$+9a^6$.

In questi esercizi è importante fare attenzione al segno. Osserva questi esempi:

$(-3a^3)^2 = +9a^6$;
$(-3a^2)^3 = -27a^6$;
$(-3a^3)^3 = -27a^9$;
$-(-3a^3)^3 = -(-27a^9) = +27a^9$.

Calcola le seguenti potenze di monomi.

124 $(-ax)^2$; $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3$; $(2a^2b)^3$; $(a^2b)^0$.

125 $(-ab^2)^3$; $-(ab^2)^3$; $(-3a^2b^5c^3)^3$; $\left(-\frac{2}{3}a^6b^2c^3\right)^4$.

126 $\left(-\frac{1}{2}a^3b^2c\right)^5$; $\left(\frac{3}{4}x^2y^3\right)^0$; $\left(-\frac{3}{2}a^2bc^4\right)^2$; $(3a^2b^5c^3)^3$.

127 ESEMPIO DIGITALE
$[(-2xy^2)^2]^3$; $[(-3a)^3]^2$; $\left\{\left[-\left(\frac{1}{4}m^2\right)^2\right]^0\right\}^3$.

128 $(3a^2b^5c^3)^2$; $(-5ab^5)^3$; $(-2a^2b^2c^2)^4$.

129 $2(a^3c^2)^2$; $-3(a^b)^2$; $(-x^{3y})^3$.

130 COMPLETA la tabella come indicato nell'esempio svolto nella prima riga. Devi sostituire alle lettere a e b presenti nei monomi della prima colonna i rispettivi monomi posti nella seconda e terza colonna. Nell'ultima colonna scrivi il monomio prodotto in forma normale.

Monomio	a	b	Monomio prodotto	Forma normale
$5ab^2$	$3x^2y$	$2y^3$	$5(3x^2y)(2y^3)^2$	$60x^2y^7$
$3a^2b^3$	$2xy^2$	xy		
$2a^3b^2$	$10x^2y^3$	$4y^2$		
$\frac{1}{2}a^2b$	$-\frac{1}{4}t^4$	$64yt$		
ab	xy	$-xy$		

COMPLETA

131 $(4a^2xy)^{\square} = 16a^4x^2y^2$

132 $(\square\, a^3b^4)^{\square} = 36a^6b^8$

133 $\left(-\frac{1}{2}bc^2\right)^{\square} = -\frac{1}{32}b^5c^{10}$

134 $(\square\, x^{\square}y^2)^3 = -8x^9y^6$

Calcola i quadrati e i cubi dei monomi.

135 ab^3; $\quad -3a^2b$; $\quad \frac{1}{2}a^3b^2$; $\quad -2xy$.

136 $-\frac{3}{5}x^2y^3$; $\quad -\frac{1}{3}x^2y^2$; $\quad \frac{2}{3}ab^4$.

137 YOU & MATHS **Maths is easier** Translate from words into mathematical symbols:

a. the square of a^3;

b. the cube of x^2y;

c. the square of the cube of p^4q^2.

138 EUREKA! **Un forte aumento** Quale numero aumenta del 500% quando se ne fa il quadrato?

A 6   D 8

B 10   E 5

C 7

(*Kangourou Italia*, 2006)

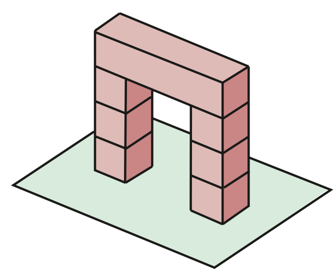
139 INVALSI 2012 **Un arco di cubi** L'arco mostrato in figura è formato da sei cubi di lato L e da un parallelepipedo di dimensioni L, L, $4L$.
Si vuole dipingere l'arco; quanto misura la superficie da colorare?

A $42L^2$

B $40L^2$

C $38L^2$

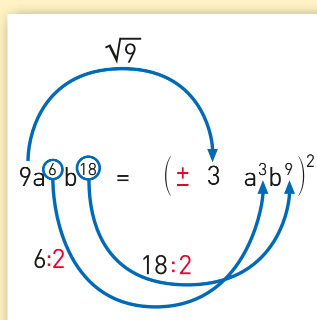
D $36L^2$



Dalla potenza al monomio

140 ESERCIZIO GUIDA Scriviamo i monomi il cui quadrato è $9a^6b^{18}$.

I monomi richiesti sono due monomi opposti, perché entrambi, elevati al quadrato, forniscono lo stesso risultato.
Calcoliamo il valore assoluto del coefficiente, cioè la radice quadrata di 9.
Determiniamo la parte letterale. Se per elevare al quadrato una lettera dobbiamo moltiplicare il suo esponente per 2, nell'operazione inversa dovremo dividere l'esponente per 2: quindi dobbiamo dividere per 2 gli esponenti 6 e 18.
I monomi richiesti sono $+3a^3b^9$ e $-3a^3b^9$.



Scrivi i monomi i cui quadrati sono i monomi seguenti.

141 ●○ **a.** $4a^2b^4$; $\quad 25x^6y^2$; $\quad \frac{1}{16}z^8$; $\quad \frac{a^2}{4}$. **b.** $\frac{4}{25}x^6y^8$; $\quad 81x^2y^{12}$; $\quad a^6b^4c^{12}$.

142 ●○ **a.** $100a^2b^{10}$; $\quad \frac{b^{16}}{9}$; $\quad \frac{25}{16}x^{10}y^8$. **b.** $\frac{4}{81}a^2b^4c^6$; $25a^{10}b^{14}$; $\quad \frac{49}{9}a^{36}b^{100}$.

Scrivi i monomi i cui cubi sono i monomi seguenti.

143 ●○ **a.** $27a^3b^3$; $\quad x^6y^9$; $\quad \frac{1}{8}a^{12}$. **b.** $-\frac{8}{27}a^9b^6c^3$; $\quad 0{,}008a^6b^{12}$; $\quad 125a^3x^9$.

COMPLETA quando è possibile.

144 ●○ **a.** $x^6y^6 = (\square)^2 = (\square)^3$; **b.** $y^{12} = (\square)^2 = (\square)^3$.

145 ●○ **a.** $-4a^2y^2 = (\square)^2 = (\square)^3$; **b.** $-x^6y^6 = (\square)^2 = (\square)^3$.

COMPLETA

146 ●○ $\left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^4c^6$

147 ●○ $(\square)^4 = 16a^8b^{16}$

148 ●○ $\left(\frac{\square}{\square}\right)^4 = \frac{1}{16}a^8b^4$

149 ●○ $27b^{27} = (\square)^3$

150 ●● $x^6y^{18} = (\square)^2 = (\square)^6$

151 ●● $\frac{1}{5}\left(\frac{\square}{\square}\right)^5 = -\frac{a^{10}b^{25}}{160}$

152 ●● $\left(\frac{\square}{\square}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}xy = -\frac{27}{2}x^4y$

153 ●● $-\frac{1}{3}a^2y\left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = -\frac{4}{27}a^4y^5$

154 ●● $-\frac{3}{4}a^3b\left(\frac{\square}{\square}\right)^2 = -\frac{1}{3}a^5b^5$

155 ●● $\left(\frac{\square}{\square}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}b = \frac{2}{3}a^4b^3$

156 ●○ **INVALSI 2007** L'espressione $16a^{10}b^6$ è il quadrato di…

A $4a^3b^5$ C $8a^5b^3$
B $-8a^5b^3$ D $-4a^5b^3$

157 ●○ **INVALSI 2006** Quale delle seguenti espressioni rappresenta un numero intero che è contemporaneamente un cubo e un quadrato se a e x sono numeri naturali qualsiasi?

A $-64a^6x^{12}$ B a^6x^4 C $64a^6x^{12}$ D $64a^8x^6$

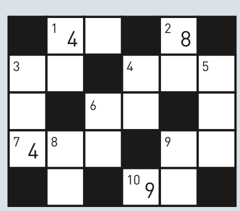
158 ●○ **INVALSI 2004** Se S è l'area di un quadrato di lato a, l'area del quadrato di lato $2a$ è espressa da…

A $8S$ C $3S$ B $4S$ D $2S$

MATEMATICA E GIOCHI

Sulla via dei crucinumeri Il monomio $8a$ indica un numero naturale multiplo di 8: sostituendo ad a i valori 0, 1, 2, … otteniamo, rispettivamente, 0, 8, 16, … In modo simile, 25 è un numero del tipo $8a + 1$, perché lo possiamo scrivere come $8 \cdot 3 + 1$.

a. Scegli i tre numeri del tipo $8a + 1$ fra 56, 65, 77, 81 e 97.
b. Scrivi altri tre numeri del tipo $8a + 1$.
c. Scrivi ora tre numeri naturali del tipo $7b + 6$, tre del tipo d^2 e tre del tipo $3^m \cdot 2^n$.



ORIZZONTALI
1. a^2; **3.** 2^n; **4.** $10h + 1$; **6.** $8a$; **7.** 21^q; **9.** $10a$; **10.** $10k + 2$.
VERTICALI
1. $7b$; **2.** $5 \cdot (2^q)^q$; **3.** d^2; **4.** q^4; **5.** $25b$; **6.** $2n^2 + 1$; **8.** $a^2 - 1$; **9.** $3^q \cdot 2^r$.

Esercizi come questi sono basati sul calcolo dei valori assunti da monomi, e da loro somme, per particolari valori assegnati alle lettere. Possono esserti utili se vuoi risolvere *crucinumeri*, come quello che proponiamo qui.

Risoluzione – 3 esercizi in più.

La semplificazione di espressioni con potenze di monomi

159 **ESERCIZIO GUIDA** Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\left(-\frac{1}{2}a^6x^3\right)^2+\left(\frac{5}{4}a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a^4x\right)^2(-2a^2x^4)-\left(-\frac{3}{2}a^4x^2\right)^3.$$

L'espressione è la somma algebrica di tre termini formati da potenze e prodotti di monomi:

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2}a^6x^3\right)^2}+\boxed{\left(\frac{5}{4}a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a^4x\right)^2(-2a^2x^4)}-\boxed{\left(-\frac{3}{2}a^4x^2\right)^3}=$$

In ciascun termine eseguiamo innanzitutto l'elevamento a potenza:

$$+\frac{1}{4}a^{12}x^6+\left(\frac{5}{4}a^2\right)\left(+\frac{1}{4}a^8x^2\right)(-2a^2x^4)-\left(-\frac{27}{8}a^{12}x^6\right)=$$

Proseguiamo come in una normale espressione con moltiplicazioni di monomi:

$$+\frac{1}{4}a^{12}x^6-\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{{}_{2}\cancel{4}}\cdot{}^{1}\cancel{2}\right)a^{2+8+2}x^{2+4}+\frac{27}{8}a^{12}x^6=$$

$$+\frac{1}{4}a^{12}x^6-\frac{5}{8}a^{12}x^6+\frac{27}{8}a^{12}x^6=$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{8}+\frac{27}{8}\right)a^{12}x^6=\frac{2-5+27}{8}a^{12}x^6=\frac{24}{8}a^{12}x^6=3a^{12}x^6.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

160 ●○ $(-xy^2)^3+\frac{1}{5}xy^4\left(\frac{10}{3}x^2y^2\right)$;　$(3a^3b^2)^2\cdot(-2a^4b^3)-(a^2b)^3(-4a^4b^4)$.　$\left[-\frac{1}{3}x^3y^6;\ -14a^{10}b^7\right]$

161 ●○ $(2x+3x)^2(-x)^3-2x^3(-2x)^2$;　$(-3a^2)\left(\frac{1}{2}ab\right)^2-\left(\frac{2}{3}a^2\right)^2(-3b^2)$.　$\left[-33x^5;\ \frac{7}{12}a^4b^2\right]$

162 ●○ $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^2+\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)\left(-\frac{3}{2}ab\right)(-2b)^3$;　$\left(-\frac{2}{3}a^2b^4\right)^2-(-2ab^3)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}ab\right)^2$.　$\left[-\frac{23}{4}a^2b^6;\ 0\right]$

163 ●○ $2a\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3-ab(-a^3b)^2+(a^2+2a^2)^4-(-9a^4)^2$　$\left[-\frac{5}{4}a^7b^3\right]$

164 ●○ $[3a(-ab^2)^2]^2-\left[\left(-\frac{1}{2}a\right)^3(-2ab^3)\right]^2$　$\left[9a^6b^8-\frac{1}{16}a^8b^6\right]$

165 ●○ $6\left(-\frac{1}{3}a^2x^3\right)^3-\left(\frac{1}{2}x^4\right)\left(-\frac{1}{3}a^2x\right)^2(-2a^2x^3)-\left[(-a)^2\left(-\frac{2}{3}x^3\right)\right]^3$　$\left[\frac{5}{27}a^6x^9\right]$

166 ●○ $-\left[2(3a^2b-4a^2b)^3\cdot\left(-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}a^2\right)^2\right]^0(2a^2)^3$　[se $a\neq0$ e $b\neq0$, $-8a^6$]

167 ●○ $\left(\frac{4}{5}a^3\right)^2\cdot\left(\frac{5}{16}b^2\right)+\frac{4}{5}\cdot(a^3b)^2-2(a^2)^3\cdot(-b)^2+a^6b^2$　[0]

168 ●○ $\frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}xy^2\right)^2:\left(\frac{3}{2}y\right)^3-\left(\frac{1}{2}xy\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^2(-2x)-[(-xy)^2:(5y)]$　[0]

169 ●○ $\left[\left(-\frac{5}{2}a^2b\right)^2+(-a)^3(4ab^2)\right]:\left(\frac{3}{4}ab\right)^2-(6ab)^2:(-2b)^2$　$[-5a^2]$

170 ●○ $\left(-\frac{1}{3}ay^2\right)^2(-2ay):(-6ay^3)-\{-[(-a)^2(-y^2)]^2\}^2:\left(-\frac{3}{2}a^3y^3\right)^2-\frac{1}{3}a^2y^2$　$\left[-\frac{20}{27}a^2y^2\right]$

171 ●● $5[(xyz^2)^3:(xyz)^2](-xa^5)^2:(-7x^2)+\left[-\frac{1}{2}a^7xz^3:\left(\frac{7}{4}a^2xz\right)\right]^2(-7x)\left(\frac{1}{2}y\right)$　$[-a^{10}xyz^4]$

172 ●● $\left[\left(-\frac{3}{4}a^3\right)^2\cdot\left(\frac{16}{3}b^4\right)^3-3(a^2)^3(b^3)^4\right]^0-2$　[se $a\neq0$ e $b\neq0$, -1]

173 ●● $(-2x^3y)^4+[-(-x^3y)^2]^2-y\left(\frac{1}{2}x^3y\right)^3(-2x)^3-(4x^6y^2)^2+(-2x)^4\left(\frac{1}{2}y\right)^2$　$[2x^{12}y^4+4x^4y^2]$

ESERCIZI

La divisione fra due monomi

174 VERO O FALSO?

a. Se due monomi sono divisibili, il grado del primo è maggiore del grado del secondo. V F

b. Se due monomi sono divisibili, i loro coefficienti sono numeri interi. V F

c. Se due monomi sono divisibili, il coefficiente del primo deve essere divisibile per il coefficiente del secondo. V F

d. Se due monomi sono divisibili, il primo deve contenere tutte le lettere del secondo. V F

175 VERO O FALSO?

a. Dato il monomio $3a^2b$, i monomi a e b sono suoi divisori. V F

b. Dato il monomio $7a$, il monomio $9a^2$ è un suo multiplo. V F

c. Il monomio quoziente di due monomi ha come coefficiente la differenza dei coefficienti dei due monomi. V F

d. Il quoziente di due monomi che hanno la stessa parte letterale è un monomio di grado 1. V F

176 SPIEGA PERCHÉ il monomio $4x^2y^3$ non è divisibile per $3x^4y$.

177 ESERCIZIO GUIDA Eseguiamo, quando è possibile, le seguenti divisioni di monomi:

a. $-24a^7 : 6a^3$; **c.** $10a^3b : 2a^4$;

b. $3ab : 4b$; **d.** $9a^3 : 2a^2b$.

a. $-24a^7 : 6a^3 =$

Osserviamo gli esponenti di a nel dividendo e nel divisore (ricordiamo che a^m è divisibile per a^n se e solo se $m \geq n$).

$7 \geq 3$, pertanto la divisione è possibile.

Applichiamo la proprietà delle potenze $a^m : a^n = a^{m-n}$: $-\frac{24}{6}a^{7-3} = -4a^4$.

b. $3ab : 4b = 3a^1b^1 : 4a^0b^1 =$

Osserviamo gli esponenti delle due lettere nel dividendo e nel divisore.

Riguardo agli esponenti di a, $1 \geq 0$; riguardo agli esponenti di b, $1 \geq 1$. Pertanto la divisione è possibile.

$$\frac{3}{4}a^{1-0}b^{1-1} = \frac{3}{4}a.$$

c. $10a^3b : 2a^4$.

Considerando gli esponenti della lettera a, abbiamo $3 < 4$, pertanto la divisione non è possibile.

d. $9a^3 : 2a^2b = 9a^3b^0 : 2a^2b^1$.

Riguardo agli esponenti di b, $0 < 1$, pertanto la divisione non è possibile.

Esegui, quando è possibile, le seguenti divisioni.

178 ESEMPIO DIGITALE $-\frac{3}{7}x^5y^8z^8 : \left(-\frac{1}{14}x^5y^6z^6\right)$; $\left(\frac{6}{5}x^3y^4zt^8\right) : \left(\frac{5}{3}x^3y^3zt^7\right)$.

179 $4a^2bc^5 : 2abc$; $-3a^4b^7c : (-3a^4b^5)$.

180 $a : \frac{1}{4}$; $\quad ab^2 : \frac{1}{7}a^2b$.

181 $\frac{5}{2}ax^4 : (-ax^4)$; $\quad x^{10}y^9 : \frac{3}{7}x^{10}y^9$.

182 $\frac{1}{5}ab^6c^2 : \left(-\frac{3}{10}b^4c\right)$; $\quad -5x^2y^3 : (5xy^2)$.

183 $-\frac{3}{4}a^2b^5 : \left(-\frac{1}{4}a^2b^3\right)$; $\quad \frac{1}{2}ab^3 : (-2a^2b^3)$.

184 $-\frac{2}{3}(ab^2)^3 : (ab^2)^2$; $\quad (a^2b^4)^3 : (-2a^2b^3)^2$.

185 $(-15x^3yc^2) : (-2xy^2z^3)$; $\quad \left(-\frac{2}{5}a^3b^2c\right) : \left(-\frac{2}{5}a^2bc\right)^3$.

186 $\frac{2}{7}x^3y : \left(-\frac{1}{2}x^3y\right)$; $\quad \left(-\frac{2}{8}a^3b^4\right)^2 : \left(\frac{1}{3}a^2b^3\right)$.

187 $\left(-\frac{2}{5}a^2b^3c^5\right) : \left(\frac{4}{15}ab^2c^3\right)$; $\quad \left(\frac{1}{5}ab^2c^3\right)^2 : \left(-\frac{2}{5}ab^2c^5\right)$.

188 $\left(-\frac{3}{4}x^3y^2\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}xy\right)^2$; $\quad \left[-\left(-\frac{3}{2}a^3\right)^3\right]^4 : \left[\left(-\frac{3}{2}a^2\right)^2\right]^6$.

COMPLETA inserendo il monomio mancante in modo che l'uguaglianza sia vera.

189 $(3a^4b) : \boxed{} = 2a$

190 $(4a^3b^2) : \boxed{} = \frac{1}{2}a$

191 $2xy : \boxed{} = 1$

192 $12a^3b^5 : \boxed{} = 24a^2b^3$

193 $\left(\frac{2}{5}a^8b^3\right) : \boxed{} = \frac{5}{2}a^4b$

194 $\left(\frac{4}{3}x^7b^5\right) : \boxed{} = 6x^3b^2$

195 $\boxed{}^3 = \frac{4}{9}a^6b^8c^9 : \frac{3}{2}a^3b^2c^3$

196 $\left(\frac{2}{3}abx^2\right)^4 = \boxed{} : (9axb^4)^2$

197 $\left(\frac{13}{4}a^4b^3x^2\right) = \left(\frac{13}{2}a^6b^3x\right)^2 : \boxed{}$

198 $\left(-\frac{3}{7}x^3y^2z\right)^2 : \boxed{}^2 = \frac{225}{196}x^4z^2$

La semplificazione di espressioni con divisioni di monomi

199 **ESERCIZIO GUIDA** Semplifichiamo la seguente espressione:

$$(3a^2b^2)^2 : 3a^3b - 2a(3b)^2 + 5a^2b^4 : 2ab^4 + 5bab^2.$$

L'espressione è la somma algebrica di quattro termini formati da divisioni e moltiplicazioni di monomi:

$$\boxed{(3a^2b^2)^2 : 3a^3b} - \boxed{2a(3b)^2} + \boxed{5a^2b^4 : 2ab^4} + \boxed{5bab^2} =$$

Eseguiamo le operazioni all'interno di ciascun termine:

$$9a^4b^4 : 3a^3b - 2a \cdot 9b^2 + \frac{5}{2}a + 5ab^3 = \underline{3ab^3} - 18ab^2 + \frac{5}{2}a + \underline{5ab^3} = 8ab^3 - 18ab^2 + \frac{5}{2}a.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

200 $[(2ab - 3ab)^2 : (2ab)] \cdot a^2b - 3a^3b^2$ $\quad \left[-\frac{5}{2}a^3b^2\right]$

201 $(5x^3 + 3x^3)^2 : (-2x)^2 + (x + x) \cdot (-x)^3$ $\quad [14x^4]$

ESERCIZI

202 ESEMPIO DIGITALE $\left(\frac{1}{2}x^6y^2\right):\left(\frac{1}{4}x^4y\right)+\frac{1}{6}(-x)^2y+\frac{5}{3}x^4y:(2x^2)$

203 $\left[\frac{1}{13}(a^8b^7)^2:\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)\right]:(a^3b^2)^4-2a^2b^5$ $\left[-\frac{28}{13}a^2b^5\right]$

204 $\left(-\frac{2}{3}a^7b^6\right):\left(\frac{4}{15}a^5b^5\right)-2a^2b+(3ab)[-2a+3(4a)]+\frac{3}{2}a^2b$ $[27a^2b]$

205 ESEMPIO DIGITALE $\left\{\left[\left(\frac{3}{5}xy\right)^2:\left(\frac{3}{5}x\right)\right]^3:\left(\frac{3}{5}x\right)^2\right\}:\left(\frac{3}{5}y^2\right)$

206 $\left[\left(\frac{1}{3}x^2\right)\cdot(-xy)^2-\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^3:\left(\frac{2}{3}xy\right)^2(-y)\right]+x^4y^2$ $\left[\frac{2}{3}x^4y^2\right]$

207 $\left\{(-3x^2yz):\left[2x^2+\frac{1}{4}(-x)^2+\frac{1}{3}x^2\right]\right\}\cdot 31-\frac{1}{4}yz$ $\left[-\frac{145}{4}yz\right]$

208 ESEMPIO DIGITALE $-5(-4b^3x^2)\left(-\frac{1}{3}bx^2\right)^2\left(-\frac{1}{2}b^2\right)^2+\left[-\frac{3}{2}(-b)^3(-x^2)\right]^3-7\left(-\frac{1}{2}b^3x^2\right)^3$

Riepilogo: Le espressioni con i monomi

Semplifica le seguenti espressioni.

209 $\left(-\frac{4}{3}ab\right)\left(-\frac{9}{4}a^2b\right):(-2ab)^2$ $\left[\frac{3}{4}a\right]$

210 $\left(-\frac{25}{9}x^3y^2z\right):\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)\cdot(6xy)^2$ $[30x^4y^2]$

211 $(-3a)^3\cdot\left[\frac{4}{3}a^2b^4:(-4a^2b)\right]^2$ $[-3a^3b^6]$

212 $[(-2xy)^2]^3:(-2xy^2)^3-2(-x)^3$ $[-6x^3]$

213 ESEMPIO DIGITALE $-[7(-a)^2-14a^2]+[4a^2bc:(-4bc)]+\frac{1}{2}a^2-\left(-\frac{3}{2}ab\right)^3:(-3ab^3)\cdot 4$

214 $(-ax)^3:(-2x)^2+x\left(-\frac{1}{2}a\right)^3+x(-a^2)^3:a^3$ $\left[-\frac{11}{8}a^3x\right]$

215 $2ab\left(\frac{1}{2}a-a\right)+(-4a)^2\cdot b+2\left(\frac{1}{2}b-b\right)a^2+a^2b$ $[15a^2b]$

216 $-4xy(-x^2yt)+2xt(-2xy)^2+(-x)^3y^2t$ $[11x^3y^2t]$

217 $[-a(-a)^2+a^5:(-a^2)]+(-a)^3+2a^2(-a)$ $[-5a^3]$

218 $\left(xy-\frac{2}{3}xy\right)y^3-x(-y^2)^3:\left(-\frac{1}{3}y\right)^2+\frac{2}{3}xy^4$ $[10xy^4]$

219 $-a^2(a^5:a^3)+(-3a^2)^2+(2a^3)^2:\left(-\frac{1}{2}a\right)^2+2a^4-(-a^2)^2$ $[25a^4]$

220 $\frac{1}{4}\cdot\left[(3a^3b^3)^2:\left(\frac{1}{9}ab\right)^2\right]:[a^4b^4:(-2ab)^2]+(-9ab)^2$ $[810a^2b^2]$

221 $\left[-3xy\left(\frac{1}{9}x^2y\right)-y^2(-x)^3\right]:(-x)^2+2x^2y^2:(-x)$ $\left[-\frac{4}{3}xy^2\right]$

222 $\left[\left(\frac{5}{2}ab-ab\right)^2\cdot(-a^2b)\right]-(3a^3b^3)^2:(9ab^2)^2+\left(-\frac{3}{2}a^2\right)^2b^3$ $\left[-\frac{1}{9}a^4b^2\right]$

223 $[a^2b-(-2a^2b)]\cdot(-3ab^2)+(-2a^2b^2)^2:\frac{1}{2}ab$ $[-a^3b^3]$

224 $3ab(-2a)^2+\left(4ab^2c:\frac{1}{4}bc\right)\cdot a^2-6a^3b$ $[22a^3b]$

225 $-(-a)^2+[(-ay^3)\cdot(-5a^3y):(-ay)^2]^2:\left(-\frac{5}{3}ay^2\right)^2$ $[8a^2]$

226 $\left[\left(\frac{5}{3}a^3b\right)^5:\left(\frac{5}{6}a^2\right)^5-ab(-2a^2b^2)^2\right]:(-2a)+(4a^2b^3)^2:\frac{8}{7}b$ $[0]$

227 $\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3-\left(\frac{3}{4}ab^2\right)^2\left(\frac{1}{36}ab^2c^3\right)-\left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3\right]:\left(-\frac{3}{4}ab^2c^2\right)$ $[-a^2b^4c]$

228 $[(-5x^2y)(-x^2y^3):(-xy)^2]^2:(-5x^2y)^2-y^2+(-2y)^2$ $[4y^2]$

229 $\left\{\left[(-2xy^2)^3:(-6xy^2)^2+\frac{5}{9}xy^2\right](-3x^2):(+x^3y^2)\right\}^3$ $[-1]$

230 $\left[\frac{1}{2}x(-4x)^2+4x^3\right]:(+2x)^2+\left\{\left[-\frac{1}{3}y(-3x)^2\right]^2\right\}^2:\left[\left(-\frac{9}{2}x^5y^3\right)(-6x^2y)\right]$ $[6x]$

231 $2x^3-(3x^5):(-2x)^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2\cdot\left(\frac{2}{9}x\right)+[2x^5+(-x^2)^2x]:(-3x^2)$ $\left[\frac{3}{4}x^3\right]$

232 $\left[(+x^3y^3)^3+\left(-\frac{2}{7}x^2y^2\right)^3\left(-\frac{7}{2}xy\right)^3\right]:(-2x^2y^2)^3+\frac{3}{2}x^3y^3$ $\left[\frac{5}{4}x^3y^3\right]$

233 $\left\{a^2b^2c+\left[-\left(-\frac{3}{2}a^2b^2c\right)-\frac{1}{2}a^2b^2c\right]\right\}:\left\{-\left[-\left(-\frac{1}{8}abc\right)+\left(-\frac{1}{2}abc\right)\right]\right\}$ $\left[\frac{16}{3}ab\right]$

234 $(-2a)\cdot\left(-\frac{3}{4}by\right)\cdot(0,\bar{6}ab^2y)\cdot\left(-\frac{5}{4}b^3xy\right)$ $\left[-\frac{5}{4}a^2b^6xy^3\right]$

235 $\left\{a^2b^2c+\left[-\frac{1}{2}a^2b^2c-\left(-\frac{3}{2}a^2b^2c\right)\right]\right\}:\left\{-\left[-(abc)+\left(-\frac{1}{8}abc\right)\right]\right\}$ $\left[\frac{16}{9}ab\right]$

236 $-\frac{2}{3}a^2b(-0,2bc)\cdot\left(-\frac{5}{4}b^3c^2\right)-\frac{3}{4}b^2c\left(-\frac{2}{3}b^3c^2\right)(-a^2)$ $\left[-\frac{2}{3}a^2b^5c^3\right]$

237 $[(-2abx^3)\cdot(-5abx):(-bx)^2]:\left[\frac{5}{3}a^3b^2x:\left(-\frac{1}{3}ab\right)^2\right]$ $\left[\frac{2}{3}ax\right]$

238 ESEMPIO DIGITALE $[(-2p^4q^2)^3:(-2p^5q^2)^2]^3:\left\{[(6p^6)^2:(18p^5)^2]\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^{-1}\frac{(-3)^3}{2}\right\}^3$

239 $\left[\left(-\frac{7}{5}bx^3\right)^2:(-2x^2)^3\right]\cdot\left[-\left(-\frac{5}{7}\right)^2\right]+(-b^2)-\left(-\frac{4}{7}b^4x^2\right):\left(-\frac{8}{21}b^2x^2\right)$ $\left[-\frac{19}{8}b^2\right]$

240 $a^6x-x\cdot\{[-(a^4y^7)^3]^2:a^{18}y^{42}\}-x^2y^3:[2bx^6y:b(x^2)^3]+\frac{1}{2}x^2y^2$ $[0]$

241 $\left(-\frac{5}{4}x^2y\right)^3(0,8x^2)^2-(-2x^2)^3\left(\frac{1}{3}x^2y\right)\left(-\frac{3}{2}xy\right)^2$ $\left[\frac{19}{4}x^{10}y^3\right]$

242 ESEMPIO DIGITALE $\frac{1}{5}bc^3+(3b^2c)(-2b^2c^2):\left(-\frac{2}{3}b^3\right)+\left(-\frac{8}{5}b\right)\left[\left(\frac{1}{2}b^2c\right)^2\right]^3:\left(\frac{1}{2}b^4c\right)^3$

243 $\left(\frac{1}{2}xy^3-2xy^3\right)^2:(13x^2y^4-4x^2y^4)+\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{4}{5}y^2\right)^2:\left(-\frac{1}{10}y^2\right)$ $\left[-\frac{13}{20}y^2\right]$

244 $\left(-\frac{3}{2}ax^2y\right)^2:\left\{\left(-\frac{2}{5}a^2b\right):\left(\frac{1}{5}ab\right)-[-6a^3b^3:(-b)^2]:(3a^2b)\right\}$ [impossibile]

245 $-abc(-4ac)\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b^3\right)+14ab^2(-2a^2bc^2)\cdot\left(-\frac{3}{7}ab\right)-(4a^2b^2c)^2$ $[-6a^4b^4c^2]$

246 $\left(-\frac{1}{2}a^3xy\right)-\left(\frac{1}{3}a^3xy\right)-(0,\bar{4}a^2x^2)+\left(\frac{5}{6}a^3xy\right)-\left(-\frac{5}{9}a^2x^2\right)$ $\left[\frac{1}{9}a^2x^2\right]$

ESERCIZI

247 $\left[(0,\bar{3}a^3b-0,\bar{2}a^3b)\cdot(-b^3+0,5b^3)\cdot(ab^2+4ab^2)\right]:(-0,\bar{3}a^3b+0,\bar{4}a^3b)$ $\left[-\frac{5}{2}ab^5\right]$

248 $0,\bar{3}x^3y\cdot\left(\frac{3}{5}x\right)+\left(\frac{2}{5}y\right)\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot x^2+xy\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)y+3xy^2$ $\left[\frac{14}{5}xy^2\right]$

249 $2,\bar{6}a^4b+3,4ab^4-3,\bar{6}a^4b+1,\bar{3}a^4b+4,6ab^4-9,\bar{3}ab^4$ $\left[\frac{1}{3}a^4b-\frac{4}{3}ab^4\right]$

250 $\left[\left(\frac{7}{9}x^2y^3\right)^4\cdot\left(\frac{6}{7}x^3y\right)^4:\left(\frac{4}{3}x^3y^3\right)^4-\left(-\frac{x^3y^2}{2}\right)^2\cdot(-x^2)\right]:\left(-\frac{5}{4}x^2y\right)^3$ $\left[-\frac{4}{25}x^2y\right]$

251 $(2mnp)^2\cdot\left(\frac{1}{2}m\right)+m^3n^2p^2+(-3m^3np^2)(2n)-(5m^5n^4p^3):(-2m^2n^2p)+\left(\frac{1}{2}m^2p^2\right)(-3mn^2)$ $\left[-2m^3n^2p^2\right]$

252 $\left\{\left[\left(3-\frac{7}{2}\right)x^3y^2z\right]^2:\left(+\frac{1}{2}x^2y\right)^3+3y(-z)^2\right\}:(+2z^2)\left[\left(\frac{7}{6}x^3y-\frac{1}{6}x^3y\right):(-x)^3\right]$ $\left[-\frac{5}{2}y^2\right]$

253 $\left\{\left[-\left(-\frac{3}{2}a^2x\right)^2\right]^2:\left[\left(-\frac{3}{2}a^3\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2\right)^2\right]-\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a^2\right)\right\}:\left[-\left(-\frac{1}{2}a\right)^2\right]$ $[+5]$

254 $\left[(+x)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{6}xy^2\right)^2:(-xy)^3-\frac{3}{2}(-x^6y^2):(x^5y)\right]\left[5x^2\left(-\frac{1}{2}y\right)+\frac{5}{2}x^2y\right]$ $[0]$

255 $-3ab\left(-\frac{2}{3}ab^2\right)^2:\left(+\frac{2}{3}a^3b^3\right)-\left[+\frac{4}{3}ab^2:\left(-\frac{2}{3}a\right)\right]+(-3a^2b)^3:\left(\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{4}a^2b\right)$ $\left[-12a^4b^2\right]$

256 $\left[-(-2ax^2)^2:\left(-\frac{5}{2}ax^2\right)-\frac{3}{5}(-a^2x)^3:(-a^5x)\right]^2:\left(-\frac{1}{2}x\right)^3+50x\left(-\frac{1}{5}a\right)^2$ $\left[-6a^2x\right]$

257 $\left\{\left(\frac{3}{7}xy^3+\frac{5}{21}xy^3\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}x^2y\right):\left[\left(-\frac{2}{3}xy\right)^2+\frac{5}{9}x^2y^2\right]+\frac{3}{4}xy^2\right\}(-2x^2y)+\frac{1}{2}x^3y^3$ $[0]$

258 $\left[(xy)^2\cdot x-2x^3y^2\right]:(-x^2)+\left[2x^2y^3+(-3x^4y^5):\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2\right]:\left[(-3x^3y^3):(2xy)^2+2xy\right]$ $\left[-7xy^2\right]$

259 $\frac{1}{2}x^6y^3+\left(\frac{2}{3}x^3y^2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x^3y\right)+\left[\left(-\frac{7}{4}x^3y^2\right)^2:\left(-\frac{7}{2}xy\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2\right]^3:\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3$ $[0]$

260 $\left[(2xy-3xy)^3-(5xy-3xy)^4:(-4xy)+(-2x^5y^5):\left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xy\right)^2\right]:\left(-\frac{1}{2}x\right)^3$ $\left[-8y^3\right]$

261 $(3x)^2:(-5x)+\left\{\left[(2xy)\left(-\frac{1}{2}x\right)(-x)^2-\left(\frac{1}{5}x^5y^2\right):(-2xy)\right]:\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}:(-2x^2y)$ $\left[-\frac{9}{10}x\right]$

262 $\left\{\left[(-ab^3c)^2\cdot(ab^3c)^5\cdot(-ab^3c)\right]^7\right\}^8:\left\{\left[(-ab^3c)^8\right]^7\right\}^8-\left[\left(-\frac{2}{3}a^3\right)^2\cdot(-a)^2\right]:\left(\frac{2}{3}a^4\right)^2$ $[0]$

263 $2x^2+\left[(-3x)^{12}:(-27x^2)^4-(x^2y)^4:(-2xy)^4\right]:(-x)^2+\left(-\frac{1}{4}x\right)^2+3(-x)^2$ $\left[6x^2\right]$

264 $\frac{1}{2}a^2b-(-a)^2\cdot(2b)+(6a^4b^3):(-2a^2b^2)+(2a^6b^3):(a^4b^2)-3ab\left(-\frac{1}{2}a\right)$ $\left[-a^2b\right]$

265 $(-2ab)^4:(2a)-\frac{3}{2}a^3b^4+\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)(5a^2b)-(14a^4b^6):(-7ab^2)+(3ab)(-a^2b^3)$ $\left[3a^3b^4\right]$

266 $(-2mn)^2:(-mn^2)+(-4m^2):(-2m)+\left[\left(-\frac{2}{5}m^3n^2\right):\left(-\frac{2}{5}mn\right)^2-\frac{1}{2}m\right]^2:(-2m)$ $\left[-\frac{13}{2}m\right]$

MATEMATICA INTORNO A NOI

Evoluzione e dimensioni corporee In natura tutti gli organismi viventi (compreso l'uomo) necessitano di un equilibrio tra il metabolismo interno e l'ambiente esterno in cui vivono. Negli animali, per esempio, le branchie e i polmoni sono mezzi che permettono di aumentare la superficie di scambio dei fluidi con l'esterno; molti altri fenomeni metabolici, per esempio il consumo di ossigeno, dipendono invece dal volume dell'organismo.

a. Alla luce di quanto detto, secondo te, perché non esistono formiche giganti?
b. In modo simile, perché non possiamo rimpicciolire un uomo di 20 volte, se non con la fantasia?

Risoluzione – 3 esercizi in più.

Dalle parole alle espressioni

Scrivi le seguenti espressioni sotto forma di monomi e, se è necessario, riduci a forma normale.

267 Il doppio prodotto tra il quadrato di a e b.

268 Il prodotto tra il quadrato di un numero e il doppio del cubo dello stesso numero.

269 Il triplo prodotto tra i quadrati di due numeri.

270 ESERCIZIO GUIDA Traduciamo le seguenti frasi mediante l'uguaglianza fra due espressioni con monomi:

a. «Il quadrato del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei loro quadrati»;

b. «L'opposto della somma di due numeri è uguale alla somma degli opposti dei numeri».

a. Indichiamo con a e con b i due numeri.
Traduciamo passo passo la frase nell'uguaglianza richiesta.

«quadrato del prodotto di a per b» = «prodotto dei quadrati di a e di b»;

«quadrato di $a \cdot b$» = «prodotto di a^2 e b^2»;

$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

b. Procediamo come nel punto **a**:

«opposto della somma di a e di b» = «somma degli opposti di a e di b»;

«opposto di $a + b$» = «somma di $-a$ e $-b$»;

$-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Traduci le seguenti frasi mediante l'uguaglianza fra due espressioni con monomi.

271 Il prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei loro opposti.

272 Il prodotto dei doppi di due numeri è uguale al quadruplo del loro prodotto.

273 Il quadrato del doppio di un numero è uguale al quadruplo del quadrato del numero stesso.

274 Se al quintuplo di un numero si sottrae il suo triplo, si ottiene il suo doppio.

275 Il prodotto del quadrato di un numero per il quadrato del suo opposto è uguale alla quarta potenza del numero stesso.

276 Il triplo del prodotto di un numero e del suo opposto è uguale all'opposto del triplo del quadrato del numero.

277 Il doppio prodotto del quadrato di un primo numero per un secondo è uguale al quadrato del prodotto dei due numeri diviso per la metà del secondo numero.

278 Il quoziente fra il quadrato del doppio del prodotto di due numeri e il doppio del quadrato del secondo è uguale al doppio del quadrato del primo numero.

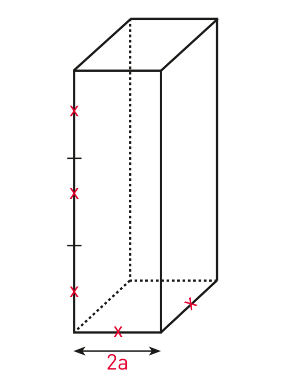
279 Moltiplicando il quadrato di un numero per il doppio di un secondo numero e dividendo il risultato per il semiprodotto dei due numeri, si ottiene il quadruplo del primo numero.

Monomi e geometria

280 ESERCIZIO GUIDA Rappresentiamo con un monomio il volume di un prisma a base quadrata il cui spigolo di base è $2a$ e la cui altezza è il triplo dello spigolo di base.

Disegniamo la figura riportando dati e relazioni del problema.
Il volume V di un prisma è dato dalla formula $V = A_b \cdot h$, dove A_b indica l'area di base e h l'altezza.
Poiché la base è un quadrato di lato $2a$, l'area di base è:

$$A_b = (2a)^2 = 4a^2.$$



L'altezza del prisma è il triplo del lato del quadrato di base, quindi:

$$h = 3 \cdot (2a) = 6a.$$

Il volume del prisma è:

$$V = 4a^2 \cdot 6a = 24a^3.$$

Il monomio che esprime il volume è $24a^3$.

Scrivi la formula che permette di calcolare la grandezza indicata e stabilisci se l'espressione è un monomio.

281 L'area di un quadrato di lato $3x$.

282 L'area di un rettangolo di base $3a$ e altezza a.

283 L'area di un triangolo di base $\frac{3}{4}x$ e altezza $\frac{4}{9}x$.

284 Il volume di un cilindro il cui raggio di base misura $2a$ e l'altezza è quadrupla del raggio.

285 L'area di un rombo di diagonali $3a$ e $2b$.

286 Scrivi le formule per il calcolo delle seguenti grandezze:

a. perimetro di un triangolo isoscele di base $2x$ e lato $3x$;
b. area di un quadrato di lato $3x^2y$;
c. area di un triangolo di base $3ab$ e altezza $4ab$;
d. perimetro di un rettangolo di base $\frac{1}{2}xy$ e altezza $\frac{3}{2}xy$.

287 ESERCIZIO GUIDA La base di un rettangolo è $6a$ e l'altezza è $4b$.

a. Calcoliamo il perimetro e l'area del rettangolo.
b. Se si aumenta la base di $3a$ e si diminuisce l'altezza di $2b$, quanto valgono il perimetro e l'area del nuovo rettangolo?

a. Il perimetro P è la somma dei lati:

$$P = 6a + 4b + 6a + 4b = 12a + 8b.$$

L'area A è il prodotto della base per l'altezza:

$$A = 6a \cdot 4b = 24ab.$$

b. La base del nuovo rettangolo è:

$$6a + 3a = 9a.$$

L'altezza del nuovo rettangolo è:

$$4b - 2b = 2b.$$

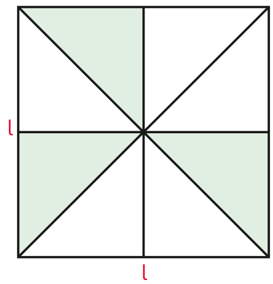
Il perimetro P' del nuovo rettangolo è:

$$P' = 9a + 2b + 9a + 2b = 18a + 4b.$$

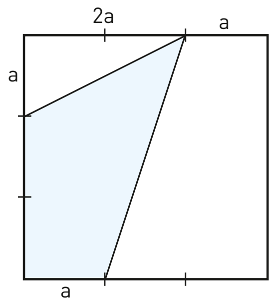
L'area A' è:

$$A' = 9a \cdot 2b = 18ab.$$

288 ●○ Il quadrato in figura ha per lato il monomio l. Determina a quale monomio corrisponde l'area della parte colorata. $\left[\frac{3}{8}l^2\right]$



289 ●○ Utilizzando i dati della figura, trova l'area della parte colorata del quadrato. $\left[\frac{7}{2}a^2\right]$



290 ●○ In un triangolo la base è $6a$ e l'altezza relativa è $\frac{9}{2}b$. Si aumenta la base di $2a$ e si diminuisce l'altezza di $3b$. Qual è la differenza fra l'area del triangolo nuovo e quella del triangolo dato? $\left[-\frac{15}{2}ab\right]$

291 ●○ In un triangolo isoscele la base è $3a$ e il lato obliquo è $\frac{10}{3}a$. Si aumenta la base di $\frac{1}{2}a$ e il lato obliquo di $\frac{1}{3}a$. Di quanto cambia il perimetro del triangolo? $\left[\frac{7}{6}a\right]$

292 ●○ La base di un rettangolo è $4a$ e l'altezza è $\frac{3}{4}a$.

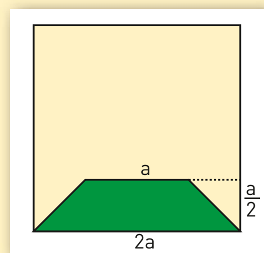
a. Calcola il perimetro del rettangolo.

b. Se si diminuisce la base di $\frac{1}{2}a$ e si aumenta l'altezza di $2a$, qual è la differenza fra il perimetro del nuovo rettangolo e il perimetro di quello di partenza? $\left[\text{a) } \frac{19}{2}a\text{; b) } 3a\right]$

293 ●○ **ESEMPIO DIGITALE**

a. Considera il quadrato della figura, esprimi l'area di ciascuna delle due sue parti colorate e calcola il loro rapporto.

b. Se si raddoppia l'altezza del trapezio e si dimezza la sua base minore, cambia il rapporto tra le aree delle due parti colorate?



294 ●○ Due rettangoli aventi la medesima base $3a$ hanno rispettivamente altezza $\frac{2}{3}b$ e $\frac{4}{3}b$. Calcola area e perimetro di ciascun rettangolo. La somma delle aree è un monomio? La somma dei perimetri è un monomio? [somma aree: $6ab$; sì; somma perimetri: $12a + 4b$; no]

295 ●○ I tre lati di un triangolo sono rispettivamente $4b$, $6b$ e $8b$. Si aumenta il primo lato di $2b$, il secondo lato di $\frac{1}{2}b$ e si diminuisce il terzo lato di $\frac{2}{3}b$.

a. Qual è la differenza fra il perimetro del nuovo triangolo e quello del triangolo dato?

b. Calcola la differenza nel caso: $b = 6$ cm. $\left[\text{a) } \frac{11}{6}b\text{; b) } 11 \text{ cm}\right]$

296 ●○ Una piramide retta a base quadrata, con lo spigolo di base uguale a $3a$ e l'altezza uguale a $\frac{2}{3}$ dello spigolo di base, è appoggiata su un cubo che ha una faccia coincidente con la base della piramide. Trova l'area totale S della figura. L'espressione di S è un monomio? Trova il valore di S per $a = 2$ cm. [$60\,a^2$; sì; 240 cm^2]

297 ●○ Considera la relazione $\mathcal{R}$ così definita:

$(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $m\mathcal{R}n \leftrightarrow$ il monomio a^{m+1} è divisibile per il monomio a^{n+1}.

Determina di quali proprietà gode questa relazione. È una relazione d'ordine? Se sì, di che tipo? [riflessiva, antisimmetrica, transitiva; sì, largo]

298 In a giorni 16 operai costruiscono un prefabbricato; in quanti giorni farebbero lo stesso lavoro 12 operai? $\left[\frac{4}{3}a\right]$

299 Abbiamo tre spese: la prima di € c, la seconda pari al triplo della somma della prima e di € $\frac{2}{3}c$, la terza pari al doppio della somma delle prime due. Quanto si è speso in tutto? Quanti euro se c vale 1000? [€ $18c$; € 18 000]

300 EUREKA! **Più bionde che biondi** In una classe gli alunni biondi sono il 40% del totale, mentre i restanti sono castani. Tra tutti gli alunni biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?

A 20% B 25% C 30% D 40% E 50%

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2012)

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

Fra interessi e tasse

Investendo in banca una quota di x euro per un anno, si ottiene un interesse del 3%.
Sul capitale riscosso si paga però una tassa dello 0,5%. Tre fratelli investono ognuno la propria quota, come indicato a lato.

- Quale cifra avranno a disposizione a fine anno Angelo, Paola e Gianni con gli investimenti indicati?

► Determiniamo come si calcola la cifra finale a disposizione.

Indicando con x la cifra investita, l'interesse annuo è dato da:

$$I = x \cdot \frac{3}{100} = \frac{3x}{100}.$$

Esprimiamo il costo della tassa da pagare sul capitale riscosso in funzione di x:

$$\text{tassa} = \frac{3x}{100} \cdot \frac{0,5}{100} = \frac{3x}{20\,000}.$$

La somma a disposizione a fine anno è uguale al capitale investito, più l'interesse maturato, meno la tassa dovuta:

$$x + \frac{3x}{100} - \frac{3x}{20\,000}.$$

► Calcoliamo la cifra che avrà a disposizione a fine anno Angelo.

$x = 15\,000$;

$$I = 3 \cdot \frac{15\,000}{100} = 450;$$

$$\text{tassa} = 3 \cdot \frac{15\,000}{20\,000} = \frac{45}{20} = 2,25.$$

$$\text{cifra finale} = 15\,000 + 3 \cdot \frac{15\,000}{100} - 3 \cdot \frac{15\,000}{20\,000} =$$

$$15\,000 + 450 - 2,25 = 15\,447,75.$$

A fine anno, Angelo ha a disposizione € 15 447,75.

► Calcoliamo la cifra che avrà a disposizione a fine anno Paola.

$x = 50\,000$;

$$I = 3 \cdot \frac{50\,000}{100} = 1500;$$

$$\text{tassa} = 3 \cdot \frac{50\,000}{20\,000} = \frac{15}{2} = 7,50.$$

$$\text{cifra finale} = 50\,000 + 3 \cdot \frac{50\,000}{100} - 3 \cdot \frac{50\,000}{20\,000} =$$

$$50\,000 + 1500 - 7,50 = 51\,492,50.$$

A fine anno, Paola ha a disposizione € 51 492,50.

► Calcoliamo la cifra che avrà a disposizione a fine anno Gianni.

$x = 78\,000$;

$$I = 3 \cdot \frac{78\,000}{100} = 2340;$$

$$\text{tassa} = 3 \cdot \frac{78\,000}{20\,000} = \frac{234}{20} = 11,70.$$

$$\text{cifra finale} = 78\,000 + 3 \cdot \frac{78\,000}{100} - 3 \cdot \frac{78\,000}{20\,000} =$$

$$78\,000 + 2340 - 11,70 = 80\,328,30.$$

A fine anno, Gianni ha a disposizione € 80 328,30.

301 Il nonno ha lasciato in eredità una somma S divisa fra quattro nipoti. Aldo riceve € $20a$, Baldo il doppio di Aldo, Carlo invece la semisomma di quanto hanno avuto gli altri due fratelli. Calcola quanto riceverà Donato. Si può esprimere come monomio? Rispondi alle stesse domande se l'eredità è di € $100a$.

[$S - 90a$, no; $10a$, sì]

302 Un'automobile percorre il tragitto fra due città in a ore alla velocità media di 70 km/h; quanto impiega a percorrere lo stesso tragitto alla velocità media di 50 km/h? (Ricorda che la formula che lega lo spazio percorso s, il tempo impiegato t e la velocità media v è: $s = v \cdot t$.)

$\left[\frac{7}{5}a\right]$

3 Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo fra monomi

Teoria a p. 272

Il massimo comune divisore

TEST

303 Fra le seguenti espressioni, una sola è un divisore comune dei monomi $5xy^2$ e $-10xy^3z^2$. Quale?

A $10xy^4$
B $5xyz$
C $-5x^2$
D xy
E $5y^3$

304 Fra i seguenti monomi, soltanto uno *non* è divisore di $\frac{4}{5}x^3yz^4$. Quale?

A $\frac{4}{3}x^2yz^4$
B $2xyz^3$
C $\frac{1}{2}yz^4$
D $\frac{2}{5}x^3$
E $\frac{4}{5}x^4yz^3$

VERO O FALSO?

305
a. Il MCD fra due monomi simili è simile al loro mcm. V F
b. Il MCD fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati. V F
c. Il MCD fra monomi è divisore di tutti i monomi dati. V F
d. Il MCD fra due monomi simili è simile ai due monomi. V F

306
a. $2a$ è un divisore di $4a$. V F
b. $3a^2$ è un divisore di $3ab$. V F
c. $8ab$ è un divisore di a^2b^3. V F
d. a^2b^3 è un divisore di $6a^4b^6c^2$. V F
e. 5 è un divisore di $10b$. V F

307 Per ogni monomio scrivi cinque monomi divisori.

$\frac{1}{4}a$; $-\frac{3}{5}a^2$; $\frac{1}{6}ab$;

$-a^2b^2$; $\frac{5}{8}a^2bc$; $\frac{1}{9}a^3b^5c^2$.

308 Dati i monomi $3ab^2$, $7a^2b^3$, $-abc^3$, determina:
a. un divisore comune di grado 0;
b. un divisore comune di grado 1;
c. un divisore comune di grado 2.

Il minimo comune multiplo

TEST

309 Fra le seguenti espressioni, solo una è un multiplo comune dei monomi $3xy^3$, $5x^2$ e $-3xy^2$. Quale?

A $15xy$
B $15x^3y^3$
C $-15x^3y^2$
D xy^4
E $15x^2y^2$

310 Fra i seguenti monomi, soltanto uno *non* è multiplo di $\frac{5}{3}ac^2$. Quale?

A $15a^2b^3c^2$
B $-\frac{4}{3}a^2c^2$
C $\frac{5}{3}b^2c^2$
D $\frac{3}{5}ab^2c^2$
E $\frac{5}{3}ab^2c^2$

ESERCIZI

VERO O FALSO?

311 a. Il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati. V F

b. Il mcm fra due monomi ha il grado uguale alla somma dei gradi dei due monomi. V F

c. Il mcm fra due monomi opposti è il quadrato di uno dei due monomi. V F

d. Il mcm fra monomi è divisore di tutti i monomi dati. V F

312 a. $-2a$ è multiplo di $2a$. V F

b. $2a$ è multiplo di 4. V F

c. $6a$ è multiplo di $12a^2$. V F

d. $3ab$ è multiplo di b. V F

e. $-\frac{1}{5}ab^2c^3$ è multiplo di $a^2b^2c^2$. V F

313 Per ogni monomio scrivi cinque suoi multipli: 8; $8a$; $-8a^2$; $\frac{1}{4}ab$; $3ab^2$; $\frac{1}{3}x^2y^3$.

Determinare MCD e mcm

314 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di monomi.

a. $\frac{3}{4}a^4bc^3$, $\frac{1}{2}a^3c^2d$, $-7a^2b^3c^5$; b. $12x^3y$, $-27xy^3$, $42y^2$.

a. I coefficienti non sono interi, quindi consideriamo solo le parti letterali e mettiamo le lettere uguali nella stessa colonna:

a^4	b	c^3	
a^3		c^2	d
a^2	b^3	c^5	

Il MCD ha per parte letterale tutti i fattori comuni (in questo caso a e c) elevati all'esponente minore: MCD $= a^2c^2$.
Il mcm ha per parte letterale tutti i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente:

$$\text{mcm} = a^4b^3c^5d.$$

b. Poiché i coefficienti (trascurando i segni) sono numeri naturali, conviene calcolare anche per essi il MCD e il mcm; scomponiamoli dunque in fattori primi:

$$12 = 2^2 \cdot 3; \quad 27 = 3^3; \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Calcoliamo ora il MCD e il mcm aggiungendo una colonna per ogni fattore primo dei coefficienti:

2^2	3		x^3	y
	3^3		x	y^3
2	3	7		y^2

MCD $= 3y$; mcm $= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7x^3y^3 = 756x^3y^3$.

Determina il MCD e il mcm fra i seguenti monomi.

315 a^4; a^{10}; a^{16}.

316 $5a$; $20a$; $16a$.

317 $4a^4$; $10a^{10}$; $12a^{12}$.

318 $3a^3b^9$; $12a^4b^6$; $6a^6b^4$.

319 $15a^3b$; $6a^2b^3c$; $10a^2c^2$.

320 $-2xy^3z$; $6x^3yz$; $8x^3z$.

321 $72a^3b^2$; $18a^2b^3x^2$; $15a^4b^4x$.

322 $\frac{1}{4}ab^2c^2$; $-3a^2b^2c^2$; $-\frac{1}{2}a^3b^2c^2$.

323 ESEMPIO DIGITALE

$\frac{1}{3}a^5x^2$; $9a^3xy$; $6a^2xy^3$.

324 $\frac{2}{5}x^2y^2$; $\frac{1}{3}x^2yz^3$; $\frac{1}{2}x^3y^2z^2$.

325 $\frac{1}{4}a^3bc^2$; $-\frac{1}{2}ab^2d$; $3a^2b^3cd$.

326 EUREKA! **Tutte uguali!** Il numero a è un intero positivo tale che la somma $a + 2a + 3a + 4a + \ldots + 9a$ è un numero in cui tutte le cifre sono uguali. Qual è il minimo valore di a? (*Kangourou Italia*, 2004)

VERIFICA DELLE COMPETENZE ALLENAMENTO

UTILIZZARE TECNICHE E PROCEDURE DI CALCOLO

TEST

1 Sono dati i monomi:

$5x^2y^3,\ -2x^2y^3,\ -3x^3y^2.$

Possiamo dire che la loro somma:

- A è uguale a 0.
- B non è un monomio.
- C è uguale a $-30x^7y^8$.
- D è uguale a $0 \cdot x^2y^3$.
- E è uguale $-25x^3y^2$.

2 Fra le seguenti coppie di monomi, soltanto una ha per prodotto a^3b^3c. Quale?

- A $\frac{1}{2}abc$, $-2a^2b^2$.
- B $-4a^2$, $\frac{1}{4}ab^3c$.
- C $-\frac{5}{7}a^3b^3$, $-\frac{7}{5}c$.
- D a^3b^3c, a^3b^3.
- E $3b^3c$, $-\frac{1}{3}a^3$.

3 Fra i seguenti monomi, solo uno *non* è divisore di $-\frac{7}{8}a^3b^2c^3$. Quale?

- A $-5a^3b^3$
- B $\frac{7}{8}a^2bc$
- C $-\frac{7}{8}ac^3$
- D $2a^3b^2c^3$
- E $-4abc$

4 Una soltanto delle seguenti uguaglianze è *falsa*. Quale?

- A $\frac{5}{7}a^2-\frac{7}{5}a^2=-\frac{24}{35}a^2$
- B $-\frac{3}{2}a^3:\left(-\frac{3}{2}a^3\right)=0$
- C $\left(-\frac{2}{5}a^2\right)^3=-\frac{8}{125}a^6$
- D $\frac{15}{7}a^2b\cdot\frac{21}{5}ab^2=9a^3b^3$
- E $(a^2)^5:(a^2)^2=a^6$

5 È data la seguente espressione:

$(3a^3b^2)^3:(-2ab^2)^3.$

Dopo che si sono eseguiti i calcoli, a quale risultato si perviene?

- A $\frac{27}{8}a^6b^6$
- B $-\frac{3}{2}a^9b^6$
- C $-\frac{27}{8}a^6$
- D $-\frac{8}{27}a^6$
- E $-\frac{3}{2}a^2$

6 Il mcm dei monomi $2a$, $-6ab$, $4a^2$, $8b^2$ è:

- A 2.
- B $8a^2b^2$.
- C $-2a$.
- D $2a$.
- E $24a^2b^2$.

Semplifica le seguenti espressioni.

7 $\frac{1}{2}xy^2(-x^3y)+x^2y\left(-\frac{3}{2}x^2y^2\right)-x^4(-y^3)+2x^2y^2(x^2y)$ $[x^4y^3]$

8 $\frac{1}{2}(-2ab^2)^2-(ab^2)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^3a^2b\cdot(-4b^3)-\frac{1}{5}a^5b^6:\left(-\frac{1}{3}a^3b^2\right)$ $\left[\frac{11}{10}a^2b^4\right]$

9 $\left[\left(-\frac{4}{3}x^2y\right)^2:\left(\frac{8}{3}x^2y\right)\right]^2-\left[\left(-\frac{1}{2}x\right)^2\cdot\left(-\frac{8}{3}y\right)\right]^2$ $[0]$

10 $-\left[-\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\right]-(-4x^2)-\frac{4}{3}y^4-\left\{-\left[-\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)-\frac{1}{2}y^4-\left(-\frac{1}{6}xy^2\right)+\left(-\frac{1}{6}y^4\right)\right]\right\}$ $[4x^2-2y^4+xy^2]$

11 $-xy\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot 2x^2y\cdot\frac{2}{3}xy^3;\qquad 3x^3\cdot\left(-\frac{1}{6}x^2y\right)\cdot\frac{2}{5}xy^2\cdot 5xy^3.$ $\left[\frac{2}{3}x^5y^5; -x^7y^6\right]$

12 $-5x\cdot(-2xy)^3+4(xy^2)^2-4y(-2x^2y)^2-5x^2(-3y^2)^2+3x(-2xy)^3$ $[-41x^2y^4]$

13 $[-4a^3b^3:(-b)^2]:(+2a^2b)-\left(-\frac{2}{3}a^2b\right):\left(\frac{1}{3}ab\right)$ $[0]$

14 $x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\cdot(yx)^3+\frac{1}{4}\cdot(2xy^3)^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2:(2y^2)$ $\left[-\frac{3}{8}x^6y^4\right]$

15 $\left[-a^2+\left(\frac{1}{5}a^3b^2\right):\left(-\frac{2}{5}ab^2\right)\right]:(-6a)+[(-2ab)^4:(+2ab^2)^2]:(+4a)$ $\left[\frac{5}{4}a\right]$

16 $[-(-a^3x)^2]^2\cdot\left\{\left[\left(\frac{1}{5}a^6x^9\right)^5\right]^0\right\}^3-x\left(\frac{1}{2}a^3x\right)^3\cdot(-2a^3)+(-2a^3x)^4$ $\left[\frac{69}{4}a^{12}x^4\right]$

Calcola MCD e mcm fra i seguenti monomi.

17 $3x^2y$; $15a^3x^2$; $9ax^2y^2$. $[\text{MCD}=3x^2;\ \text{mcm}=45a^3x^2y^2]$

18 $\frac{1}{4}ab^2x$; $-\frac{2}{3}a^2bx^3$; $\frac{1}{2}a^3b^3x^3$. $[\text{MCD}=abx;\ \text{mcm}=a^3b^3x^3]$

19 $4a^3bc^2$; $16ac^3$; $8b^2c$. $[\text{MCD}=4c;\ \text{mcm}=16a^3b^2c^3]$

20 $15x^5y^4z^6$; $5x^3y^2z^3$; $10x^2y^4z^4$. $[\text{MCD}=5x^2y^2z^3;\ \text{mcm}=30x^5y^4z^6]$

RISOLVERE PROBLEMI

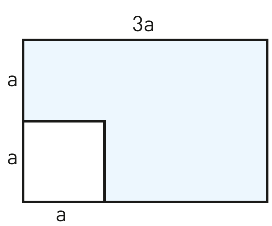
21 Sottrai alla terza parte di un numero a, aumentata di 4, la metà dello stesso numero, aumentata di 6.

a. Che numero devi aggiungere per ottenere un monomio con parte letterale a?

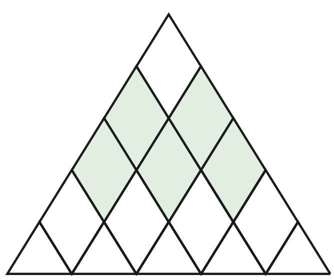
b. Quale monomio aggiunto al precedente dà un monomio con coefficiente 1?

$\left[\text{a) } 2;\ \text{b) } \frac{7}{6}a\right]$

22 Con i dati della figura, trova il perimetro e l'area della zona colorata del rettangolo. $[10a;\ 5a^2]$



23 Dato il triangolo in figura, se la sua area è il monomio $\frac{1}{2}bh$, quale monomio rappresenta l'area della parte colorata? $\left[\frac{1}{5}bh\right]$



24 INTORNO A NOI Lucia possiede una quantità di francobolli pari a $2x$, Marco ne possiede $\frac{2}{3}x$ e Benedetta $2x$ più di Lucia.

Se Lucia cede una quantità di francobolli pari a $\frac{1}{2}x$ a Benedetta, quanto vale la differenza tra i francobolli di Benedetta e di Marco ora? $\left[\frac{23}{6}x\right]$

25 INTORNO A NOI Approfittando di uno sconto, Marta acquista il triplo delle vaschette di gelato comprate la settimana precedente. Sapendo che le vaschette sono scontate del 40%, questa seconda volta, avrà speso di più o di meno? [di più]

VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE

1 ora

PROVA A

1 COMPLETA

$\frac{1}{2}x^4 - 3x(\square) = -x^4$; $\qquad (-9x^2yz)(\square) = \frac{1}{9}x^3yz^4$;

$\left(-\frac{1}{3}x^9\right)(\square\, x^2y^{\square}) = 8x^{\square}y^6$; $\qquad (\square\, m^8n^5) : (-6m^{\square}n) = \frac{6}{5}m^2n^{\square}$.

Semplifica le seguenti espressioni.

2 $\frac{1}{2}xy - (-x^2) - x^2 - y^2 + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3}xy$

3 $\left(\frac{1}{2}a^5y^5\right) : (-5a^2y^2) + (a^3y)\left(\frac{1}{4}y^2\right) - (3a^4y^3) : (-2a)$

4 $\{x^2y^4 - 3(-y^4x)x - [x^7y^2 \cdot (-x^3y^5)] : (-x^8y^3) + 12y^5x^2 : (-3y)\}^2$

---

5 Trova MCD e mcm dei seguenti monomi.

$4x^2y^2$; $\quad 6xy^2z$; $\quad 18xy^3z^3$.

6 Esprimi la seguente frase utilizzando i monomi e semplifica l'espressione trovata.
«Dati due numeri, moltiplica il cubo del primo per il doppio del quadrato del secondo e dividi il risultato per il quadrato del prodotto dei due numeri».

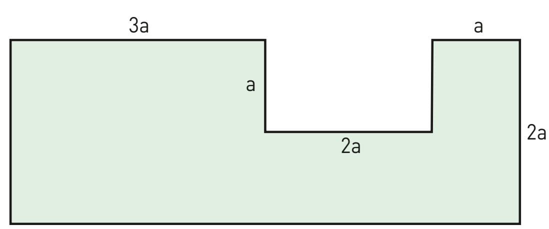
PROVA B

1 Un pannello di legno di forma rettangolare viene ritagliato come in figura.

a. Trova perimetro e area della figura in funzione di a.

b. Se la base del pannello misura 48 cm, qual è l'area della sagoma?

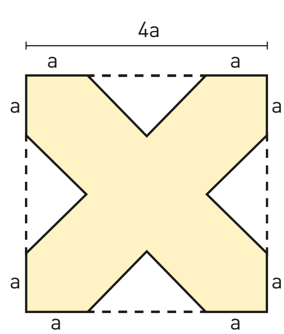
c. Che percentuale del pannello iniziale rappresenta la parte colorata?



---

2 INVALSI 2006

Da un quadrato di lato $4a$ sono stati ritagliati quattro triangoli rettangoli isosceli come nella figura. Quanto vale l'area della parte colorata?



A $8a^2$ $\quad$ B $12a^2$ $\quad$ C $14a^2$ $\quad$ D $15a^2$

3 Grazie a un buono acquisto, Catia riceve un ulteriore sconto del 20% sul prezzo dei jeans, già scontato per saldi.
Qual è lo sconto complessivo? Quanto pagherà Catia?