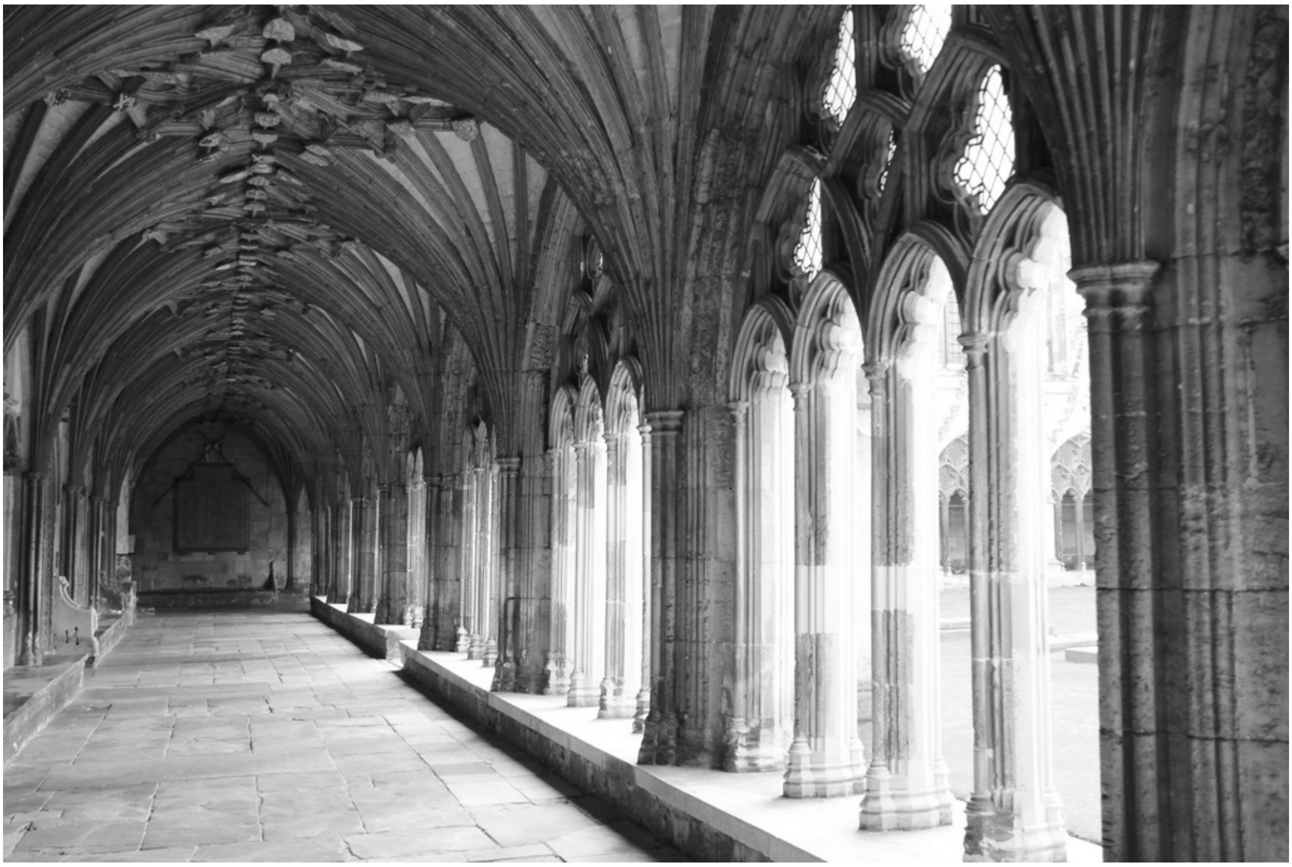
MATEMATICA C^3 -ALGEBRA 2

5. SISTEMI NON LINEARI



Canterbury Cathedral by Bortescristian
http://www.flickr.com/photos/bortescristian/5083747705

SISTEMI NON LINEARI

►1. Sistemi di secondo grado

Un sistema di equazioni non è altro che l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. L'insieme delle soluzioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

Diamo la seguente definizione

DEFINIZIONE. Il **grado di un sistema di equazioni**, se le equazioni che formano il sistema sono costituite da polinomi, è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

Esempio

Determinare il grado dei seguenti sistemi di equazioni

A) $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 3x+5y-2=0 \end{cases}$
La prima equazione e la seconda equazione sono di primo grado.
Il sistema è di primo grado

B) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$
La prima equazione è di primo grado, la seconda equazione di secondo grado.
Il sistema è di secondo grado.

C) $\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ y=3x^2-2x+6=0 \end{cases}$
La prima equazione è di secondo grado, come la seconda.
Il sistema è di quarto grado.

I sistemi di secondo grado sono dunque composti da una equazione di secondo grado e da una equazione di primo grado.

Sistemi di secondo grado numerici

Esempio

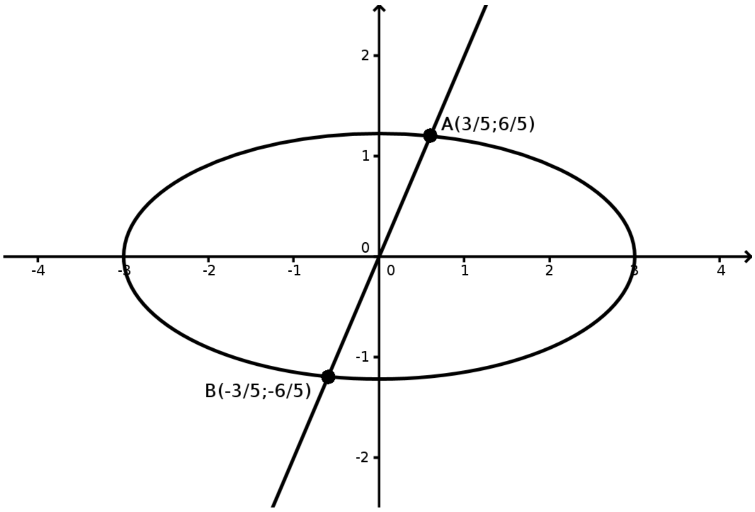
■ $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$

Utilizziamo il metodo di sostituzione che abbiamo già visto per i sistemi di primo grado.

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=2x \\ x^2+6\cdot(2x)^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2+24x^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $25x^2-9=0 \rightarrow x_1=-\frac{3}{5} \vee x_2=\frac{3}{5}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la x nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della y. Le coppie $(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$ se ci sono, si dicono soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1=-\frac{3}{5} \\ y_1=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{6}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=+\frac{3}{5} \\ y_2=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=+\frac{6}{5} \end{cases} \end{cases} \rightarrow \left(-\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right) \vee \left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$$

Nel corso degli studi vedremo come le soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=2x$ e l'ellisse rappresentata dall'equazione $x^2+6y^2=9$. Con un software matematico come Geogebra inseriamo le due equazioni e otteniamo la seguente figura.



I punti A e B, intersezione tra la retta e l'ellisse corrispondono alle soluzioni del sistema.

1 Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x^2+5y^2=6 \end{cases}$

- Ricaviamo y dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $\begin{cases} y=\dots\dots\dots \\ x^2+5y^2=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\dots\dots \\ x^2+5(\dots\dots)^2=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\dots\dots \\ 21x^2\dots\dots\dots\dots=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione risolvente di secondo grado le soluzioni sono $x_1=1 \vee x_2=-\frac{1}{21}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la x nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della y . $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=\dots\dots \end{cases}; \begin{cases} x_2=-\frac{1}{21} \\ y_2=\dots\dots\dots \end{cases} \rightarrow (1;\dots) \vee \left(-\frac{1}{21};\dots\dots\right)$

2 Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+5y^2=23 \end{cases}$

- Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione: $\begin{cases} x=\dots\dots\dots \\ x+5y^2=23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dots\dots\dots \\ (\dots\dots\dots)+5y^2=23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ 5y^2\dots\dots\dots\dots=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione risolvente di secondo grado le soluzioni sono $y_1=-2 \vee y_2=\frac{12}{5}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la y nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della x . $\begin{cases} x_1=\dots\dots \\ y_1=-2 \end{cases}; \begin{cases} x_2=\dots\dots \\ y_2=\frac{12}{5} \end{cases} \rightarrow (\dots;-2) \vee \left(\dots\dots;-\frac{12}{5}\right)$

3 Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} x-5y=2 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$

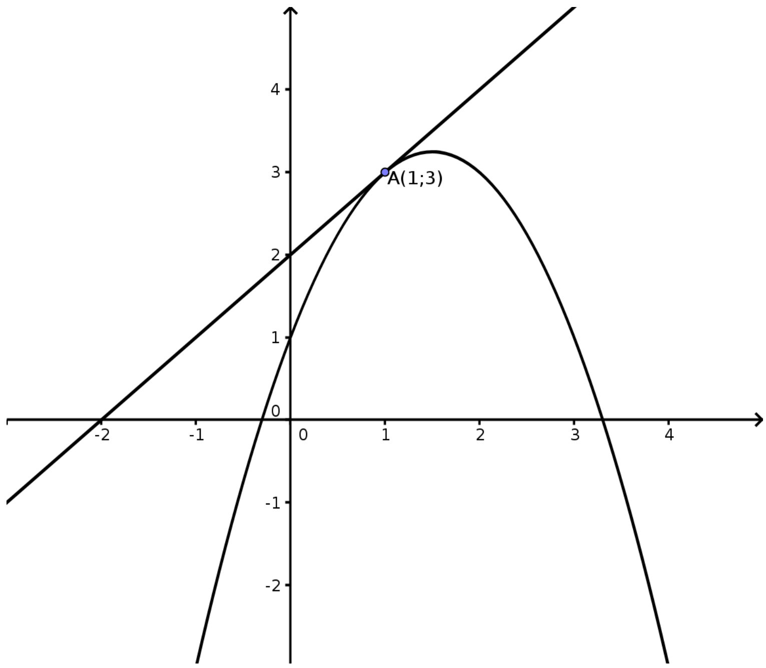
- Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $\begin{cases} x=\dots\dots\dots \\ x^2+2y^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dots\dots\dots \\ (\dots\dots\dots)^2+2y^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5y+2 \\ \dots\dots+20y=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione risolvente di secondo grado le soluzioni sono $y_1=0 \vee y_2=-\frac{20}{27}$
- Si sostituiscono i valori trovati per la y nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della x. $\begin{cases} x_1=\dots\dots \\ y_1=0 \end{cases}; \begin{cases} x_2=\dots\dots \\ y_2=-\frac{20}{27} \end{cases} \rightarrow (\dots;0) \vee \left(\dots\dots;-\frac{20}{27}\right)$

Esempio

- $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+(x+2)-3x-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. L' **equazione risolvente del sistema**. $x^2-2x+1=0$ ha il discriminante uguale a zero e due soluzioni reali coincidenti: $x_1=x_2=1$.
- Il sistema ha due soluzioni reali coincidenti, $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1+2=3 \end{cases} \rightarrow (1;3)$

La soluzione del sistema $\begin{cases} x-y=-2 \\ x^2+y-3x-1=0 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=x+2$ e la parabola rappresentata dall'equazione $y=-x^2+3x+1$. La soluzioni saranno due punti reali coincidenti. Questo punto è detto punto di tangenza tra retta e parabola. Ecco come appare la rappresentazione grafica ottenuta con Geogebra.



4 Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-3y^2=1 \end{cases}$

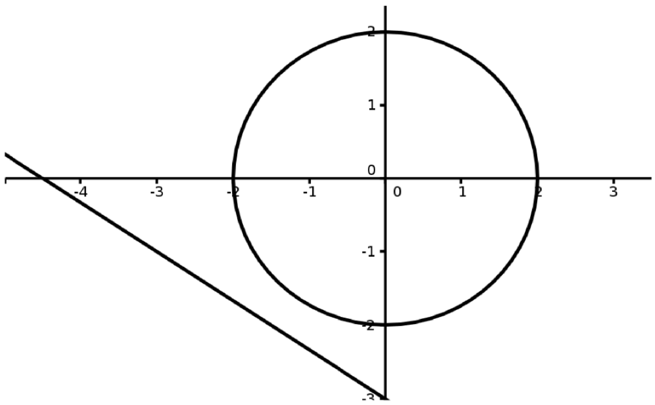
- Ricaviamoci x dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $$\begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ x^2-3y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ \left(\dfrac{1+3y}{2}\right)^2-3y^2-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ -\dfrac{3}{4}y^2+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{3}{4}=0 \end{cases}$$
- Risolvere l'equazione risolvente che ha il discriminante uguale a 0. Ci sono due soluzioni reali coincidenti: $y_1=y_2=1$
- Si sostituisce il valore trovati per la y nella equazione di primo grado per trovare il valore corrispondente della x . $\begin{cases} x_1=x_2=2 \\ y_1=y_2=1 \end{cases} \rightarrow (2;1)$

Esempio

Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$

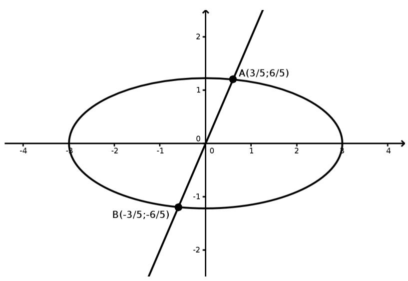
- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\left(-\frac{2}{3}x-3\right)^2-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ x^2+\frac{4}{9}x^2+4x+9-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-3 \\ \frac{13}{9}x^2+4x+5=0 \end{cases}$
- Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta **equazione risolvente del sistema**. $\frac{13}{9}x^2+4x+5=0$. Il discriminante dell'equazione è negativo: $\Delta=16-\frac{260}{9}<0$, quindi l'equazione non ha soluzioni reali e $I:S=\emptyset$.
- Il sistema non ha soluzioni reali e il sistema si dice **impossibile**.

Le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$ possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=-\frac{2}{3}x-3$ e la circonferenza rappresentata dall'equazione $x^2+y^2=4$. La seguente figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in geogebra. Notiamo che le figure geometriche ottenute non hanno punti d'incontro.

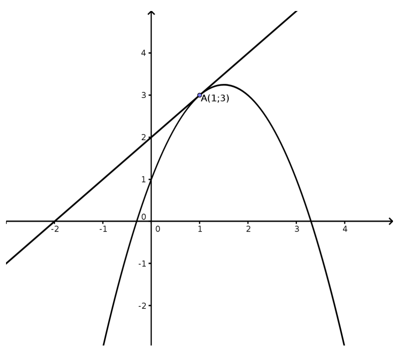


Osservazione: Un sistema di secondo grado, con equazione risolvente di secondo grado, rappresenta sempre l'intersezione tra una retta e una curva di secondo grado (circonferenza , parabola, ellisse o iperbole).
Le soluzioni del sistema rappresentano i punti di incontro tra retta e curva.
In base al segno del discriminante dell'equazione risolvente abbiamo:

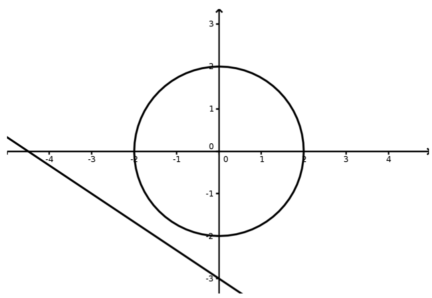
- $\Delta>0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti distinti.
- $\Delta=0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti coincidenti
- $\Delta<0$ il sistema non ha soluzioni reali. Retta e curva non hanno punti in comune.



$\Delta>0$



$\Delta=0$



$\Delta<0$

5 Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$

- Ricaviamoci y dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione:. $\begin{cases} y=\dfrac{5x-3}{2} \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \to \begin{cases} y=\dfrac{5x-3}{2} \\ x^2-\left(\dfrac{5x-3}{2}\right)^2=1 \end{cases} \to \begin{cases} y=\dfrac{5x-3}{2} \\ -\dfrac{21}{4}x^2+\dfrac{15}{2}x-\dfrac{13}{4}=0 \end{cases}$
- Risolviamo l'equazione associata. In questo caso il discriminante dell'equazione è negativo. Non ci sono soluzioni reali
- Il sistema è impossibile.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=-x \\ 0=0 \end{cases}$
- L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è una **identità** (uguaglianza vera) e tutte le coppie formate da numeri opposti (la prima equazione ci vincola ad avere $y=-x$) sono soluzioni del sistema: $\forall k \in \mathbb{R} \to I.S.=(k;-k)$.
- Il sistema ha infinite coppie di numeri reali che lo soddisfano e si dice **indeterminato**.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x+y=0 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=-x \\ x^2-(-x)^2=9 \end{cases} \to \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=9 \end{cases} \to \begin{cases} y=-x \\ 0=9 \end{cases}$
- L' equazione risolvente del sistema in questo caso è una **contraddizione** (uguaglianza falsa).
- Il sistema è **impossibile**.

Esempio

■ $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado,e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nella equazione di secondo grado a ogni occorrenza dell'incognita isolata. $\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-(x-1)^2-4=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2+2x-1-4=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases}$
- L' **equazione risolvente del sistema** in questo caso è l'equazione di primo grado $2x+5=0$, la cui soluzione è $x=\dfrac{5}{2}$.
- Si sostituisce il valore trovato nell'altra equazione e troviamo la soluzione del sistema che in questo caso è unica: $\begin{cases} y=x-1 \\ 2x=5 \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2} \end{cases} \to \left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Conclusione

- Se l'equazione risolvente è di **secondo grado**; in base al discriminante abbiamo:
  - $\Delta < 0$: l'equazione risolvente è impossibile: in questo caso anche il sistema risulta essere impossibile.
  - $\Delta = 0$: l'equazione risolvente ha due soluzioni coincidenti: in questo caso il sistema si completa sostituendo il valore trovato nell'equazione di primo grado. Il sistema ha due soluzioni coincidenti. La soluzione è una coppia ordinata di numeri reali.
  - $\Delta > 0$: l'equazione risolvente ha due soluzioni distinte: si sostituisce allora ciascuno dei due valori trovati nell'equazione di primo grado. Le due coppie ordinate di numeri reali trovate sono entrambe soluzioni del sistema.

- Se l'equazione risolvente risulta essere una equazione di **primo grado** o una **uguaglianza** vera o falsa.
  - se si ottiene una uguaglianza vera, il sistema è indeterminato;
  - se si ottiene una uguaglianza falsa il sistema è impossibile;
  - l'equazione risolvente è di primo grado determinata, da essa si ricava il valore dell'incognita e si sostituisce tale valore nell'altra equazione. Il sistema ha una sola soluzione (in questo caso non si parla di due soluzioni coincidenti, come nel caso di $\Delta = 0$).

Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado

6 $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1) \vee \left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} 3x^2-4y^2-x=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(-1;-1) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$

7 $\begin{cases} 4x^2+2y^2-6=0 \\ x=y \end{cases}$ R. $(1;1) \vee (-1;-1)$ $\begin{cases} 2x^2-6xy=x \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$ R. $\left(0;-\frac{2}{5}\right) \vee \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$

8 $\begin{cases} y^2-3y=2xy \\ y=x-3 \end{cases}$ R. $(3;0) \vee (-6;-9)$ $\begin{cases} xy-x^2+2y^2=y-2x \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$

9 $\begin{cases} 5x^2-y^2+4y-2x+2=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

10 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x-3y+7=0 \end{cases}$ R. $(-4;-3) \vee \left(\frac{44}{25};\frac{117}{25}\right)$

11 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-4xy+2y^2+x+y-1=0 \end{cases}$ R. $(1;1) \vee \left(\frac{10}{7};\frac{11}{14}\right)$

12 $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2+2xy+y^2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

13 $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $(3;1) \vee (5;3)$

14 $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$ R. $\left(2;-\frac{3}{2}\right) \vee \left(\frac{22}{25};-\frac{89}{50}\right)$

15 $\begin{cases} 2x^2+xy+7x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $y=-2x+3 \rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}$

16 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-3x+2y=3 \end{cases}$ R. $(0;1) \vee \left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$

17 $\begin{cases} x-2y-7=0 \\ x^2-xy=4 \end{cases}$ R. $(1;-3) \vee \left(-8;-\frac{15}{2}\right)$

18 $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-x-10=0 \end{cases}$ R. $(-4;2) \vee \left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

19 $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy-x+2y-4=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$ R. $(4;4) \vee (-5;-2)$

20 $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$ R. $(4;2) \vee \left(\frac{4}{15};-\frac{2}{15}\right)$

21 $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases}$ R. $\left(1+\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \vee \left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

22 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-2xy-2y-2=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right)$

23 $\begin{cases} 9x^2-12xy+4y^2-2x+6y=8 \\ x-2y=2 \end{cases}$ R. $\left(\frac{-9+\sqrt{241}}{8};\frac{-25+\sqrt{241}}{16}\right) \vee \left(\frac{9+\sqrt{241}}{8};\frac{25+\sqrt{241}}{16}\right)$

24 $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\left(\frac{6-\sqrt{2}}{4};\frac{-2+3\sqrt{2}}{4}\right) \vee \left(\frac{6+\sqrt{2}}{4};\frac{2+3\sqrt{2}}{4}\right)$

25 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+3y=10 \end{cases}$ R. $\emptyset$

26 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ R. $(1;1)$

27 $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

Sistemi di secondo grado letterali

Esempio

Determinare le soluzioni del seguente sistema si secondo grado letterale $\begin{cases} y-k\,x=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases}$

L'equazione si risolve come nel caso precedente. Bisognerà nell'equazione risolvente discutere per quali valore del parametro si otterranno soluzioni reali.

- Ricaviamo la y dalla prima equazione e sostituiamo la sua espressione nella seconda equazione: $\begin{cases} y=k\,x-2 \\ k\,x-2-x^2=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=k\,x-2 \\ -x^2+k\,x-4=0 \end{cases}$
- Risolviamo l'equazione di secondo grado $-x^2+k\,x-4=0$ equivalente a $x^2-k\,x+4=0$, con la discussione del parametro k sulla base del segno del discriminante.

$$\Delta=k^2-16 \rightarrow \begin{array}{l} \Delta>0 \rightarrow k<-4 \vee k>4 \rightarrow x_1=\frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \vee x_2=\frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ \Delta=0 \rightarrow k=-4 \vee k=4 \rightarrow x_1=x_2=\frac{k}{2} \\ \Delta<0 \rightarrow -4<k<4 \end{array}$$

- Sostituiamo i valori della x trovati per i valori del parametro k che ammettono soluzioni reali distinte o coincidenti nell'equazione di primo grado trovando così le soluzioni del sistema. l'equazione di secondo grado trovata nel sistema e operiamo come al solito per trovare la soluzioni:

$$\begin{cases} y-k\,x=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases} \text{ se } k\leq-4 \vee k\geq4 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_1=\frac{k^2-4-k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_2=\frac{k^2-4+k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases}$$

Risolvere i seguenti sistemi, dopo aver eseguito la discussione sul parametro

28 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$ R. se $k \geq \frac{9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_1=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2} \\ y_2=\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2} \end{cases}$

29 $\begin{cases} ky+2x=4 \\ xy=2 \end{cases}$ R. se $k \leq 1 \rightarrow \begin{cases} x_1=1-\sqrt{1-k} \\ y_1=-\frac{2}{\sqrt{1-k}-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=1+\sqrt{1-k} \\ y_2=\frac{2}{\sqrt{1-k}+1} \end{cases}$

30 $\begin{cases} y=kx-1 \\ y^2-kx^2+1=0 \end{cases}$ R. se $0<k<1 \vee 1<k \leq 2 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{2k-k^2}}{k^2-k} \\ y_1=\frac{1-\sqrt{2k-k^2}}{k-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{2k-k^2}}{k^2-k} \\ y_2=\frac{1+\sqrt{2k-k^2}}{k-1} \end{cases}$

31 $\begin{cases} y=kx-2k \\ x^2-2y-x=2 \end{cases}$ R. $\forall k \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2k-1 \\ y_2=2k^2-3k \end{cases}$

32 $\begin{cases} y-x-2=0 \\ 4ky+4x^2+9=0 \end{cases}$

R. se $k \leq -1 \vee k \geq 9 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-k-\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \\ y_1=\frac{-k+4-\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-k+\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \\ y_2=\frac{-k+4+\sqrt{k^2-8k-9}}{2} \end{cases}$

33 $\begin{cases} y=x+k \\ y=3x^2+2x \end{cases}$ R. se $k \geq -\frac{1}{12} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{12k+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1-\sqrt{12k+1}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{12k+1}}{6} \\ y_1=\frac{6k-1+\sqrt{12k+1}}{6} \end{cases}$

34 $\begin{cases} y=-x+k \\ x^2-y^2-1=0 \end{cases}$ R. se $-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2} \\ y_1=\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{k+\sqrt{2-k^2}}{2} \\ y_2=\frac{k-\sqrt{2-k^2}}{2} \end{cases}$

35 $\begin{cases} y=x+2 \\ y+x^2-k=0 \end{cases}$ R. se $k \geq \frac{7}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{4k-7}}{2} \\ y_1=\frac{3-\sqrt{4k-7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{4k-7}}{2} \\ y_2=\frac{3+\sqrt{4k-7}}{2} \end{cases}$

36 $\begin{cases} y+x-k=0 \\ xy+2kx-3ky-6k^2=0 \end{cases}$ R. $\forall k \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=3k \\ y_1=y_2=-2k \end{cases}$

37 $\begin{cases} y-x+k=0 \\ y-x^2+4x-3=0 \end{cases}$ R. se $k \leq \frac{13}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5-\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k-\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{5+\sqrt{13-4k}}{2} \\ y_1=\frac{5-2k+\sqrt{13-4k}}{2} \end{cases}$

Sistemi di secondo grado frazionari

Esempio

Determinare le soluzioni del seguente sistema frazionario: $\begin{cases} 2x-y=2 \\ \dfrac{x}{y+2}=\dfrac{x}{2y+5} \end{cases}$.

Il sistema dà origine a un'equazione di secondo grado. Nel caso dei sistemi frazionari occorre procedere alla definizione del campo di esistenza dell'equazione frazionaria, discutendo i denominatori della equazione.

- Determiniamo le condizioni di esistenza dell'equazione frazionaria: $C.E.\ y\neq -2 \wedge y\neq -\frac{5}{2}$
- Trasformiamo l'equazione frazionaria nella sua forma canonica di equazione intera
  $\dfrac{x}{y+2}=\dfrac{x}{2y+5} \to x\cdot(2y+5)-x\cdot(y+2)=0 \to 2xy+5x-xy-2x=0 \to xy+3x=0$
- Sostituiamo l'equazione di secondo grado trovata nel sistema e operiamo come al solito per trovare la soluzioni: $\begin{cases} y=2x-2 \\ xy+3x=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=2x-2 \\ x(2x-2)+3x=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases}$

  $2x^2+x=0$ è l'equazione risolvente del sistema con soluzioni $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}$

  sostituiamo le soluzioni trovate nell'equazione di primo grado ottenendo le soluzioni del sistema

  $\begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{1}{2}\ \text{¿} \\ y_2=-1 \end{cases} \to (0;-2) \vee \left(\frac{1}{2};-1\right)$
- La soluzione $(0:-2)$ non soddisfa le C.E. . Il sistema ha soluzione $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

Trova le soluzioni dei seguenti sistemi frazionari

38 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \dfrac{x+2y}{x-1}=2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 1 \to (2;0)\vee\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)\right]$

39 $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y}=4 \\ x^2+y^2+3x-2y=1 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq y \to \left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)\vee(-2;-1)\right]$

40 $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x+2y}=3 \\ xy+3y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -2y \to \emptyset]$

41 $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{x}=\dfrac{1-x}{y-1} \\ 2x-y=1 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq 0 \wedge y\neq 1 \to (4;7)]$

42 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-2}=y+\dfrac{1}{3} \\ y=2x+2 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq 2 \to (-1;0)\vee\left(\frac{10}{3};\frac{26}{3}\right)\right]$

43 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y-2}=\dfrac{y-1}{x+1} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ x\neq -1 \wedge y\neq 2 \to \left(-\frac{5}{2};4\right)\right]$

44 $\begin{cases} \dfrac{y-1}{x+y}=x \\ x-y=0 \end{cases}$ R. $[C.E.\ x\neq -y \to \emptyset]$

45 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2y-1}=y \\ 2y-x=-4 \end{cases}$ R. $\left[C.E.\ y\neq\frac{1}{2} \to (2;-1)\vee\left(9;\frac{5}{2}\right)\right]$

Sistemi di secondo grado in tre incognite

Quanto detto si può estendere ai sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite. Per risolvere uno di tali sistemi si cercherà, operando successive sostituzioni ricavabili dalle equazioni di primo grado, di eliminare dall'equazione di secondo grado tutte le incognite tranne una. Si otterrà così, in genere, un'equazione di secondo grado (equazione risolvente del sistema).

A partire dalle eventuali soluzioni di tale equazione, si determineranno poi le soluzioni del sistema.

Esempio

Determinare l'insieme soluzione del sistema di secondo grado $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases}$

- Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado, e sostituiamo l'espressione a destra dell'uguale nelle altre equazioni a ogni occorrenza dell'incognita isolata.
$$\begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-2(2x+y)=1 \\ xy-y^2+(2x+y)-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-4x-2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ -x+2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases}$$
- Ricaviamo x dalla seconda equazione e la sostituiamo nelle altre
$$\begin{cases} z=2(2y-1)+y \\ x=2y-1 \\ 2y^2-y-y^2+4y-2-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=5y-2 \\ x=2y-1 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}$$
- L'equazione $y^2-y-2=0$ è l'equazione risolvente del sistema le cui soluzioni sono $y_1=2 \vee y_2=-1$
- Si sostituiscono i valori trovati per la y nelle altre equazioni per trovare i valori corrispondenti della x e della z.
$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} z=5(2)-2=8 \\ x=2(2)-1=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} z=5(-1)-2=-7 \\ x=2(-1)-1=-3 \\ y=-1 \end{cases} \end{matrix} \rightarrow (x_1;y_1;z_1) \vee (x_2;y_2;z_2) \rightarrow (3;2;8) \vee (-3;-1;-7)$$

Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado in tre incognite

46 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+3z=9 \\ x^2-y+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-4;\frac{25}{2};\frac{17}{2}\right) \vee \left(3;-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

47 $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+z=0 \\ x^2+xy-z=0 \end{cases}$ R. $(-1;-2;3) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$

48 $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y+3z=9 \\ x^2-y+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

49 $\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x^2+2xz+y^2=6 \end{cases}$ R. $(1;2;-1)$

50 $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x+y^2+z^2=32 \end{cases}$ R. $\left(0;\frac{3\sqrt{7}+1}{2};-\frac{3\sqrt{7}-1}{2}\right) \vee \left(0;-\frac{3\sqrt{7}-1}{2};\frac{3\sqrt{7}+1}{2}\right)$

51 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x^2-y+z=3 \end{cases}$ infinte soluzioni

52 $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-2y+z=1 \\ x^2-y^2+z=12 \end{cases}$ R. $\left(-\frac{47}{3};-\frac{46}{3};\frac{5}{3}\right)$

53 $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 5y+2z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ R. $\emptyset$

54 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+2y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=29 \end{cases}$ R. $(5;0;-2) \vee (-2;0;5)$

►2. Sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni in due incognite è detto ***simmetrico*** se rimane invariato scambiando le incognite.

Esempio: consideriamo il sistema di secondo grado: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+3xy+5=0 \end{cases}$. Se scambiamo la x con la y otteniamo $\begin{cases} y+x=1 \\ y^2+x^2+3yx+5=0 \end{cases}$ che per la proprietà commutativa della addizione e del prodotto è identico al precedente. In questo caso le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-2 \end{cases}$ e come si può notare la x e la y vengono scambiate nella soluzione.

Osservazione: Se il sistema è simmetrico trovata una soluzione del sistema otteniamo la simmetrica assegnando il valore trovato per la x alla y e viceversa.

Sistemi simmetrici di secondo grado

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$

Per risolvere questo sistema è sufficiente ricordare che, nell'equazione di secondo grado con coefficiente direttivo uguale a 1 del tipo $x^2+bx+c=0$, *la somma delle radici è uguale all'opposto del coefficiente di primo grado, mentre il prodotto è uguale al termine noto*; in sostanza, basta risolvere la seguente equazione, detta ***equazione risolvente:*** $\boldsymbol{t^2-st+p=0}$. In base al segno del discriminante abbiamo:

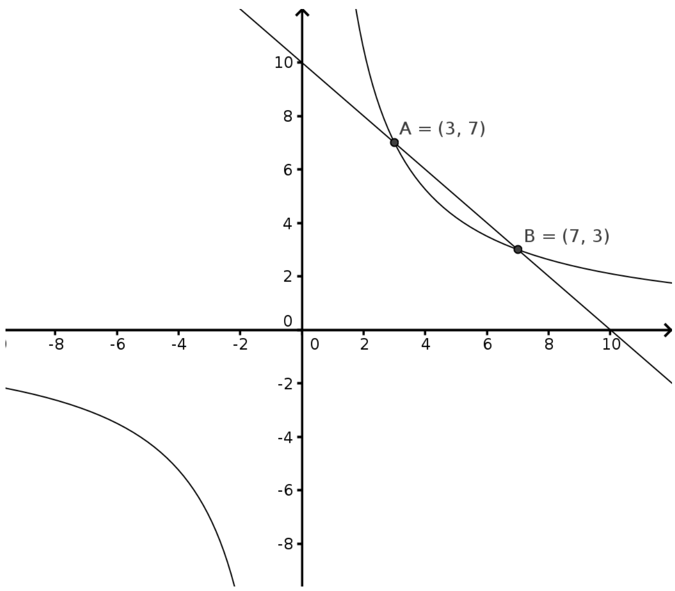
- $\Delta>0$ se t_1 e t_2 sono le soluzioni dell'equazione risolvente, il sistema iniziale ammette le soluzioni: $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_2 \\ y_2=t_1 \end{cases}$
- $\Delta=0$ l'equazione risolvente ha due radici reali coincidenti $t_1=t_2$. Anche le soluzioni del sistema saranno due soluzioni coincidenti $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_1 \\ y_2=t_1 \end{cases}$
- $\Delta<0$ l'equazione non ammette soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

Il sistema $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ è detto **sistema simmetrico fondamentale**.

Esempio

■ $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=21 \end{cases}$

- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-10t+21=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=3 \vee t_2=7$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=3 \end{cases}$.

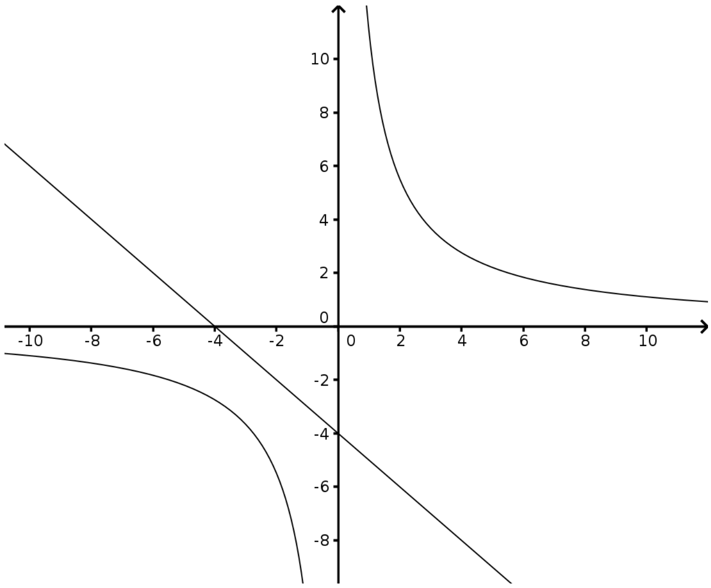


Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=10$ interseca l'iperbole equilatera $xy=21$ nei due punti $A(7;3)$ e $B(3;7)$.

Esempio

- $\begin{cases} x+y=-4 \\ x\,y=11 \end{cases}$
  - Otteniamo l'equazione risolvente $t^2+4t+11=0$
  - L'equazione risolvente ha discriminante negativo e non ha soluzioni reali
  - Il sistema è impossibile

Interpretando la situazione nel piano cartesiano, possiamo osservare che la retta $x+y=-4$ non interseca l'iperbole equilatera $xy=11$.



Risolvere i seguenti sistemi simmetrici

55 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

56 $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=7 \end{cases}$ R. $\emptyset$

57 $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

58 $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$

59 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

60 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

61 $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

62 $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

63 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=10 \end{cases}$ R. $\emptyset$

64 $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

65 $\begin{cases} x+y=12 \\ xy=-13 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=13 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=13 \end{cases}$

66 $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-14 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-7 \\ y=2 \end{cases}$

67 $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=-14 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$

68 $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=2 \end{cases}$ R. $\emptyset$

69 $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{4} \\ xy=-\dfrac{3}{8} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

70 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

71 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-10 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1+\sqrt{11} \\ y=1-\sqrt{11} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1-\sqrt{11} \\ y=1+\sqrt{11} \end{cases}$

72 $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

73 $\begin{cases} x+y=\dfrac{4}{3} \\ xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{4+\sqrt{34}}{6} \\ y=\dfrac{4-\sqrt{34}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{4-\sqrt{34}}{6} \\ y=\dfrac{4+\sqrt{34}}{6} \end{cases}$

74 $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2} \\ xy=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

75 $\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{2} \\ xy=-\dfrac{9}{2} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{5+\sqrt{97}}{4} \\ y=\dfrac{5-\sqrt{97}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{5-\sqrt{97}}{4} \\ y=\dfrac{5+\sqrt{97}}{4} \end{cases}$

76 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

77 $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$

78 $\begin{cases} x+y=\dfrac{6}{5} \\ xy=\dfrac{9}{25} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

79 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-50 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2+3\sqrt{6} \\ y=2-3\sqrt{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2-3\sqrt{6} \\ y=2+3\sqrt{6} \end{cases}$

80 $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=50 \end{cases}$ R. $\emptyset$

Sistemi simmetrici riconducibili al sistema simmetrico fondamentale

In questa categoria rientrano i sistemi simmetrici che, mediante artifici algebrici, possono essere trasformati, in modo equivalente, in sistemi simmetrici del tipo precedente.

Esempio

Verificare che il sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$ è equivalente al sistema $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$

È possibile trasformare il sistema appena scritto in un sistema simmetrico fondamentale: vediamo ora come.

- Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così: $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy+b(x+y)=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ a^2-2xy+ba=c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\dfrac{a^2+ab-c}{2} \end{cases}$
- Posto $a=s$ e $p=\dfrac{a^2+ab-c}{2}$ i sistemi $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ risultano equivalenti.

Di seguito vengono presentati vari esempi di sistemi simmetrici che possono essere risolti con questi metodi.

Esempio

■ $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

- Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così: $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (7)^2-2xy=25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ -2xy=25-49 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$
- I sistemi $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$ sono equivalenti, risolviamo il sistema simmetrico fondamentale.
- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-7t+12=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=3 \vee t_2=4$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}$

81 Determinare le soluzioni del seguente sistema: $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases}$

- Ricordando l'identità $x^2+y^2=\ldots\ldots\ldots\ldots$, il sistema può essere riscritto così: $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ (\ldots\ldots)^2-2xy=\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ -2xy=\ldots\ldots-\ldots\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-12 \\ xy=\ldots\ldots \end{cases}$
- I sistemi $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-12 \\ xy=36 \end{cases}$ sono equivalenti e a questo punto possiamo risolvere l'ultimo sistema scritto, che risulta essere simmetrico.
- Otteniamo l'equazione risolvente ………………
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=t_2=\ldots\ldots\ldots$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=\ldots\ldots \\ y_1=\ldots\ldots \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\ldots\ldots \\ y_2=\ldots\ldots \end{cases}$

Esempio

■ $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases}$

- Dividendo per(-3) la prima equazione, per 2 la seconda e ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ otteniamo:

$$\begin{cases}-3x-3y=-5\\2x^2+2y^2=10\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\x^2+y^2=5\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\(x+y)^2-2xy=5\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-2xy=5\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\xy=-\dfrac{10}{9}\end{cases}$$

- I sistemi $\begin{cases}-3x-3y=-5\\2x^2+2y^2=10\end{cases}$ e $\begin{cases}x+y=\dfrac{5}{3}\\xy=-\dfrac{10}{9}\end{cases}$ sono equivalenti e a questo punto possiamo risolvere l'ultimo sistema scritto.
- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-\frac{5}{3}t-\frac{10}{9}=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{6}\vee t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{6}$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases}x_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6}\\y_1=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6}\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{6}\\y_2=\dfrac{5-\sqrt{65}}{6}\end{cases}$

Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale

82 $\begin{cases}x+y=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

83 $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2=2\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

84 $\begin{cases}x+y=3\\x^2+y^2=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

85 $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2+x+y=1\end{cases}$ R. $\emptyset$

86 $\begin{cases}2x+2y=-2\\(y-x)^2-xy=101\end{cases}$ R. $\begin{cases}x_1=-5\\y_1=4\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=4\\y_2=-5\end{cases}$

87 $\begin{cases}-4x-4y=-44\\2x^2+2y^2-3xy=74\end{cases}$. R. $\begin{cases}x_1=8\\y_1=3\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=3\\y_2=8\end{cases}$

88 $\begin{cases}x+y=3\\x^2+y^2-4x-4y=5\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$

89 $\begin{cases}x+y=4\\x^2+y^2=8\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

90 $\begin{cases}x+y=7\\x^2+y^2=29\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$

91 $\begin{cases}2x+2y=-2\\4x^2+4y^2=52\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$

92 $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{3}{4}\\3x^2+3y^2=\dfrac{15}{4}\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1\end{cases}$

93 $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2-3xy=4\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$

94 $\begin{cases}x+y=-3\\x^2+y^2-5xy=37\end{cases}$ R. $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}\vee\begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$

95 $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^2+y^2-xy=84 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=2 \end{cases}$

96 $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+y^2-4xy+5x+5y=36 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases}$

97 $\begin{cases} x+y=-7 \\ x^2+y^2-6xy-3x-3y=44 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{13}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{13}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

98 $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x+y=6 \end{cases}$ R. $\emptyset$

99 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=-7 \end{cases}$ R. $\emptyset$

100 $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x+y=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

101 $\begin{cases} x^2+y^2-4xy-6x-6y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

102 $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ y=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ y=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

Sistemi non simmetrici riconducibili a sistemi simmetrici

Rientrano in questa classe i sistemi che, pur non essendo simmetrici, possono essere trasformati, mediante opportune sostituzioni, in sistemi simmetrici. Naturalmente questi sistemi si possono risolvere anche con la procedura solita di sostituzione per i sistemi di secondo grado.

Esempio

Determinare le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=-15 \end{cases}$

- I° passo: mediante la sostituzione $y'=-y$ otteniamo $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale
- II° passo: risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzione sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1'=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2'=3 \end{cases}$
- III° passo: dall'uguaglianza $y'=-y \rightarrow y=-y'$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=-3 \end{cases}$.

Esempio

Determinare le soluzioni del sistema cercando di trasformalo in un sistema simmetrico e con la procedura di sostituzione per i sistemi di secondo grado: $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ xy=2 \end{cases}$

Riduzione a un sistema simmetrico	Procedura di sostituzione
• Mediante la sostituzione $x'=2x$ e $y'=-3y \rightarrow x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo $\begin{cases} x'+y'=8 \\ \frac{x'}{2}\cdot\left(-\frac{y'}{3}\right)=2 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale.	• Isoliamo una delle due incognite nell'equazione di primo grado e la sostituiamo nell'altra equazione $\begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ xy=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ x\left(\frac{2x-8}{3}\right)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ 2x^2-8x-6=0 \end{cases}$
• Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzione sono le seguenti: $\begin{cases} x_1'=4-2\sqrt{7} \\ y_1'=4+2\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2'=4+2\sqrt{7} \\ y_2'=4-2\sqrt{7} \end{cases}$	• Risolvere l'equazione di secondo grado in una sola incognita: $2x^2-8x-6=0$ equivalente a $x^2-4x-3=0$. Applicando la formula ridotta otteniamo: $x_1=2-\sqrt{7} \vee x_2=2+\sqrt{7}$
• Dalle uguaglianza $x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=\frac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{4+2\sqrt{7}}{2}=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$	• Si sostituiscono i valori trovati per la x nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della y $\begin{cases} x_1=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$

103 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ R. (-1; -2), (2;1)

104 $\begin{cases} -2x+y=3 \\ xy=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ y_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ y_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

Introduciamo le seguenti trasformazioni di formule dette di Waring, dal nome del matematico che le ha formulate per primo, che potranno essere utili per risolvere i sistemi simmetrici. Con tali formule, si possono trasformare le potenze di un binomio in relazioni tra somme e prodotti delle due variabili che lo compongono.

Indicate come s somma delle variabili e p il loro prodotto queste sono le prime formule fino alla potenza quinta.

- $\boldsymbol{a^2+b^2} = (a+b)^2-2ab = \boldsymbol{s^2-2p}$
- $\boldsymbol{a^3+b^3} = (a+b)^3-3a^2b-3ab^2 = (a+b)^3-3ab(a+b) = \boldsymbol{s^3-3ps}$
- $\boldsymbol{a^4+b^4} = (a+b)^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3 = (a+b)^4-6a^2b^2-4ab(a^2+b^2) =$
  $= s^4-6p^2-4p(s^2-2p) = \boldsymbol{s^4-4ps^2+2p^2}$
- $\boldsymbol{a^5+b^5} = (a+b)^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4 = (a+b)^5-5ab(a^3+b^3)-10a^2b^2(a+b) =$
  $= s^5-5p(s^3-3ps)-10sp^2 = \boldsymbol{s^5-5ps^3+5p^2s}$

<u>Esempio</u>

■ Risolvere il seguente sistema simmetrico di **terzo grado** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3-2xy=3 \end{cases}$

- Ricordando l'identità $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^3-3\,xy\,(x+y)-2\,xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (1)^3-3\,xy(1)-2\,xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 1-5\,xy=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

- I sistemi $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3-2\,xy=3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$ sono equivalenti, risolviamo il sistema simmetrico fondamentale.
- Otteniamo l'equazione risolvente $t^2-t-\frac{2}{5}=0 \rightarrow 5\,t^2-5\,t-2=0$
- Troviamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{10} \vee t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{10}$
- Le soluzioni del sistema sono le seguenti: $\begin{cases} x_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{10} \\ y_1=\dfrac{5+\sqrt{65}}{10} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{10} \\ y_2=\dfrac{5-\sqrt{65}}{10} \end{cases}$

Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di terzo grado

105 $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^3+y^3=-1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=0 \end{cases}$

106 $\begin{cases} x+y=-2 \\ x^3+y^3-xy=-5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=\dfrac{-5-\sqrt{10}}{5} \\ y_1=\dfrac{-5+\sqrt{10}}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{-5+\sqrt{10}}{5} \\ y_2=\dfrac{-5-\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

107 $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^3+y^3=-342 \end{cases}$ R. (1;-7), (-7;1)

108 $\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=152 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=3 \end{cases}$

<u>Esempio</u>

- ■ Risolvere il seguente sistema simmetrico di **quarto grado** $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\dfrac{7}{2} \end{cases}$
- Ricordando l'identità $x^4+y^4=(x+y)^4-4\,xy\,(x+y)^2+2\,x^2\,y^2$, il sistema può essere riscritto così: $\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^4-4\,xy\,(x+y)^2+2\,x^2\,y^2=\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^4-4\,xy\,(-1)^2+2\,x^2\,y^2=\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2\,x^2\,y^2-4\,xy-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases}$
- I sistemi $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2\,x^2\,y^2-4\,xy-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases}$ sono equivalenti, ma quello trasformato non corrisponde al sistema simmetrico fondamentale. Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=x\,y$. L'equazione $2\,x^2\,y^2-4\,xy-\frac{5}{2}=0$ diventa $2\,u^2-4\,u-\frac{5}{2}=0$ che ha come soluzioni $u_1=-\frac{1}{2} \vee u_2=\frac{5}{2} \rightarrow xy=-\frac{1}{2} \vee xy=\frac{5}{2}$.
- Il sistema di partenza è equivalente all'unione dei due sistemi simmetrici fondamentali $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t-\frac{1}{2}=0$:

  $t_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \vee t_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ con soluzioni $\begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\frac{5}{2} \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t+\frac{5}{2}=0$

  L'equazione ha $\Delta<0$ e l'insieme soluzione è vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.

- Le soluzione del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\frac{7}{2} \end{cases}$ sono $\begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Risolvere i seguenti sistemi di quarto grado

109 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=1 \end{cases}$

110 $\begin{cases} x+y=-1 \\ 8x^4+8y^4=41 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2} \\ y_1=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{1}{2} \\ y_2=-\frac{3}{2} \end{cases}$

111 $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$ R $\emptyset$

112 $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=257 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$

<u>Esempio</u>

- ■ Risolvere il seguente sistema simmetrico di **quarto grado** $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$
- Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così:

  $\begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2-2xy=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2-2(-2)=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$

- Il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$ equivalente al sistema di partenza è equivalente all'unione dei due sistemi

  fondamentali $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$.

- Risolviamo il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2-3t-2=0$:

  $t_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ con soluzioni $\begin{cases} x_1=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ y_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

- Risolviamo il sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+3t-2=0$

  con soluzioni $t_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \vee t_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $\begin{cases} x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

- Le soluzioni del sistema $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ sono

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \\ y_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ y_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_3=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y_3=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_4=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y_4=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di quarto grado

113 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\,y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

114 $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x\,y=15 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

115 $\begin{cases} x\,y=1 \\ x^2+y^2+3\,x\,y=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

116 $\begin{cases} x\,y=12 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

117 $\begin{cases} x\,y=1 \\ x^2+y^2-4\,x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

118 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x\,y=3 \end{cases}$ R. $\emptyset$

119 $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x\,y=9 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$

120 $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x\,y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2} \end{cases}$

121 $\begin{cases} x^2+y^2+3\,x\,y=10 \\ x\,y=6 \end{cases}$ R. $\emptyset$

122 $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y-2\,x-2\,y=3 \\ x\,y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

123 $\begin{cases} x^2+y^2-6\,x\,y+3\,x+3\,y=2 \\ x\,y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3+\sqrt{7} \\ y=-3-\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3-\sqrt{7} \\ y=-3+\sqrt{7} \end{cases}$

124 $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-6 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

125 $\begin{cases} x^2+y^2+5\,x\,y+x+y=-\dfrac{25}{4} \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ y=-\dfrac{1+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{1+\sqrt{33}}{4} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$

Esempio

- ■ Risolvere il seguente sistema simmetrico di **quinto grado** $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$
- Ricordando l'identità $x^5+y^5=(x+y)^5-5\,xy\,(x+y)^3+5\,x^2\,y^2\,(x+y)$, il sistema può essere riscritto in questo modo:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^5-5\,xy\,(x+y)^3+5\,x^2\,y^2\,(x+y)=-211 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^5-5\,xy\,(-1)^3+5\,x^2\,y^2\,(-1)=-211 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ -5\,x^2\,y^2+5\,xy+210=0 \end{cases}$$

- I sistemi $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=-1 \\ -5x^2y^2+5xy+210=0 \end{cases}$ sono equivalenti, ma quello trasformato non corrisponde al sistema simmetrico fondamentale. Introduciamo l'incognita ausiliaria $u=xy$. L'equazione $-5x^2y^2+5xy+210=0$ diventa $-5u^2+5u+210=0$ che ha come soluzioni $u_1=-6 \vee u_2=7 \rightarrow xy=-6 \vee xy=7$.
- Il sistema di partenza è equivalente all'unione dei due sistemi simmetrici fondamentali $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$
- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t-6=0$:
  $t_1=-3 \vee t_2=2$ con soluzioni $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$
- Troviamo le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=7 \end{cases}$ con equazione risolvente $t^2+t+7=0$
  .L'equazione ha $\Delta<0$ e l'insieme soluzione è vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali.
- Le soluzione del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$ sono $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-3 \end{cases}$

Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di quinto grado

126 $\begin{cases} x+y=-\frac{1}{3} \\ x^5+y^5=-\frac{31}{243} \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3} \\ y_1=\frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{1}{3} \\ y_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$

127 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5=-2 \end{cases}$ R $\emptyset$

128 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5+7xy=17 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-1 \end{cases}$

<u>Esempio</u>

Determinare le soluzioni del seguente sistema di <u>sesto grado</u> riconducibile a un sistema simmetrico: $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ xy=-14 \end{cases}$

- Se eleviamo al cubo la seconda equazione otteniamo il sistema equivalente $\begin{cases} x^3-y^3=351 \\ x^3y^3=-2744 \end{cases}$
- Mediante le sostituzioni $u=x^3$ e $v=-y^3$ otteniamo $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale
- Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} u+v=351 \\ u\cdot v=2744 \end{cases}$ con la procedura nota.. Le soluzioni sono le seguenti: $\begin{cases} u_1=8 \\ v_1=343 \end{cases} \vee \begin{cases} u_2=343 \\ v_2=8 \end{cases}$
- Dalle uguaglianze $u=x^3 \rightarrow x=\sqrt[3]{v}$ e $v=-y^3 \rightarrow y=-\sqrt[3]{v}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=7 \\ y_2=-2 \end{cases}$.

Risolvi i seguenti sistemi di grado superiore al secondo

129 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

130 $\begin{cases} x^3+y^3=-342 \\ x+y=-6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-7 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-7 \\ y=1 \end{cases}$

131 $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

132 $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

133 $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

134 $\begin{cases} x^3+y^3=-35 \\ x\,y=6 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$

135 $\begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ x\,y=-3 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

136 $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x\,y=1 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

137 $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

138 $\begin{cases} x^5+y^5=64 \\ x+y=4 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

139 $\begin{cases} x^5+y^5=-2882 \\ x+y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

140 $\begin{cases} x^5+y^5=2 \\ x+y=0 \end{cases}$ R. $\emptyset$

141 $\begin{cases} x^5+y^5=31 \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

142 $\begin{cases} x^4+y^4=337 \\ x\,y=12 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$

143 $\begin{cases} x^3+y^3=\dfrac{511}{8} \\ x\,y=-2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=4 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=4 \end{cases}$

►3. Sistemi omogenei di secondo grado

Un sistema si dice omogeneo se le equazioni, con l'eccezione dei termini noti, hanno, hanno tutti i termini con lo stesso grado. I sistemi omogenei di secondo grado sono quindi della forma:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$$

Primo caso se d=0 e d' =0

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=0 \end{cases}$

Un sistema di questo tipo ha sempe almeno la soluzione nulla (0; 0).

Per trovare le soluzioni del sistema poniamo $y=tx$

$\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=0 \end{cases}$

Supponendo $x\neq 0$ possiamo dividere le due equazioni per x^2 , otteniamo due equazioni nell'incognita t che possiamo risolvere, se le due equazioni ammettono qualchhe soluzione comune allora il sistema ammette soluzione. Va poi analizzato a parte il caso x=0.

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ -x^2+5xy-6y^2=0 \end{cases}$

Applichiamo la sostituzione $y=tx$, il sistema diventa $\begin{cases} x^2-3tx^2+2t^2x^2=0 \\ -x^2+5tx^2-6t^2x^2=0 \end{cases}$.

Dividendo per x^2 otteniamo $\begin{cases} -3t+2t^2=0 \\ 1-5t+6t^2=0 \end{cases}$.

La prima equazione è risolta per $t_1=1\vee t_2=\frac{1}{2}$. La seconda equazione è risolta per $t_1'=\frac{1}{2}\vee t_2'=\frac{1}{3}$

Le due equazioni hanno una radice in comune $t=\frac{1}{2}$. Pertanto oltre alla soluzione (0;0) il sistema ammette infinite soluzioni che possono essere scritte come $\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{2}k \end{cases}$.

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} x^2-6xy+8y^2=0 \\ x^2+4xy-5y^2=0 \end{cases}$

Per mezzo della sostituzione y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2-6tx^2+8t^2x^2=0 \\ x^2+4tx^2-5t^2x^2=0 \end{cases}$

Dividendo per il x^2 sistema diventa $\begin{cases} 1-6t+8t^2=0 \\ 1+4t-5t^2=0 \end{cases}$. Risolvendo le due equazioni si trova che non hanno alcuna soluzione in comune, pertanto il sistema ha solo la soluzion enulla (0; 0).

<u>Esempio</u>

■ $\begin{cases} -4x^2-7xy+2y^2=0 \\ 12x^2+21xy-6y^2=0 \end{cases}$

Sostituendo y=tx e dividendo per x^2 il sistema diventa $\begin{cases} -4t-7t+2t^2=0 \\ 12+21t-6t^2=0 \end{cases}$. Le due equazioni hanno le stesse soluzioni, che sono $t_1=4\,;t_2=-\frac{1}{2}$. Il sistema ammette quindi infinite soluzioni che sono date da

$\begin{cases} x=k \\ y=4k \end{cases};\begin{cases} x=k' \\ y=-\frac{1}{2}k' \end{cases}$. Al variare di k e k' si ottengono tutte le soluzioni del sistema.

Secondo caso se $d=0 \wedge d'\neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} ax^2+btx^2+ct^2x^2=0 \\ a'x^2+b'tx^2+c't^2x^2=d' \end{cases}$.

Dividiamo per x^2 la prima equazione si ha $\begin{cases} a+bt+ct^2=0 \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Si risolve la prima equazione nell'incognita t, si sostituiscono i valori trovati nella seconda equazione e si ricavano i valori di x, infine si possono ricavare anche i valori di y.

Esempio

- $\begin{cases} x^2-xy-6y^2=0 \\ -x^2+2xy-3y^2=-6 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} 1-t-6t^2=0 \\ x^2(-1+2t-3t^2)=-6 \end{cases}$

La prima equazione ha per soluzioni $t_1=\frac{1}{3}$ e $t_2=-\frac{1}{2}$.

Sostituendo $t=\frac{1}{3}$ nella seconda equazione si ha $x=\pm 3$ da cui $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}; \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-1 \end{cases}$

Sostituendo $t=-\frac{1}{2}$ si ottengono le soluzioni $x_1=\frac{2\sqrt{66}}{11}$ e $x_2=\frac{-2\sqrt{66}}{11}$.

Le soluzioni del sistema sono $\begin{cases} x_3=2\frac{\sqrt{66}}{11} \\ y_3=-\frac{\sqrt{66}}{11} \end{cases}; \begin{cases} x_4=-2\frac{\sqrt{66}}{11} \\ y_4=-\frac{\sqrt{66}}{11} \end{cases}$

Terzo caso se $d=0 \wedge d'\neq 0$

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Ponendo y=tx si ha $\begin{cases} x^2(a+bt+ct^2)=d \\ x^2(a'+b't+c't^2)=d' \end{cases}$

Dividiamo membro a membro le due equazioni, otteniamo $\frac{a+bt+ct^2}{a'+b't+c't^2}=\frac{d}{d}'$

da cui $d'(a+bt+ct^2)=d(a'+b't+c't^2)$ da cui $(cd'-c'd)t^2+(bd'-b'd)t+ad'-a'd=0$

che è una equazione di secondo grado nell'incognita t. Trovate le soluzioni t_1 e t_2 dobbiamo poi risolvere i sistemi $\begin{cases} y=t_1x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}; \begin{cases} y=t_2x \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$

Esempio

- $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=-68 \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Sostituendo y=tx il sistema diventa $\begin{cases} x^2(1+3t-t^2)=-68 \\ x^2(-2+t+3t^2)=88 \end{cases}$ da cui $\frac{1+3t-t^2}{-2+t+3t^2}=-\frac{68}{88}$, da cui

l'equazione $29t^2+83t-12=0$. Le soluzioni di quest'ultima equazione sono $t_1=\frac{4}{29}; t_2=-3$.

A questo punto dobbiamo risolvere i due sistemi: $\begin{cases} y=\frac{4}{29}x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}; \begin{cases} y=-3x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=6 \end{cases}; \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-6 \end{cases}$.

Queste sono le uniche soluzioni del sistema.

Risolvi i seguenti sistemi simmetrici

144 $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy-2y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

145 $\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2=0 \\ 2x^2+xy-3y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$

146 $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 \\ 4x^2-2xy-6y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$

147 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2-4xy+4y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

148 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2+2xy-8y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$

149 $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \\ x^2+5xy+6y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

150 $\begin{cases} x^2+7xy+12y^2=0 \\ 2x^2+xy+6y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

151 $\begin{cases} x^2+6xy+8y^2=0 \\ 2x^2+12xy+16y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-4t \\ y=t \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2t \\ y=t \end{cases}$

152 $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy+2y^2=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-t \\ y=t \end{cases}$

153 $\begin{cases} x^2+4xy=0 \\ x^2+2xy-4y^2-4=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

154 $\begin{cases} x^2-8xy+15y^2=0 \\ x^2-2xy+y^2=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{5}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

155 $\begin{cases} 4x^2-y^2=0 \\ x^2-y^2=-3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

156 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2-3xy-y^2=3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

157 $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=0 \\ 2x^2-y^2=-1 \end{cases}$ sol impossibile

158 $\begin{cases} 6x^2+5xy+y^2=12 \\ x^2+4xy+y^2=6 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-4\sqrt{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=4\sqrt{6} \end{cases}$

159 $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2-4xy+y^2=6 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

160 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

161 $\begin{cases} x^2-3xy+5y^2=1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

162 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-3xy+y^2=11 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

163 $\begin{cases} x^2+5xy+4y^2=10 \\ x^2-2xy-3y^2=-11 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

164 $\begin{cases} 4x^2-xy-y^2=-\frac{1}{2} \\ x^2+2xy-y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$

165 $\begin{cases} x^2-xy-8y^2=-8 \\ x^2-2y^2-xy=16 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$

166 $\begin{cases} x^2-6xy-y^2=10 \\ x^2+xy=-2 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

167 $\begin{cases} 4x^2-3xy+y^2=32 \\ x^2+3y^2-9xy=85 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=-7 \end{cases}$

168 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=8 \\ 3x^2-y^2+xy=-4 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=-\frac{14}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{10}{3} \\ y=\frac{14}{3} \end{cases}$

169 $\begin{cases} x^2+5xy-7y^2=-121 \\ 3xy-3x^2-y^2=-7 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{18}{7} \\ y=-\frac{37}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{18}{7} \\ y=\frac{37}{7} \end{cases}$

170 $\begin{cases} x^2-5xy-3y^2=27 \\ -2x^2-2y^2+4xy=-50 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{34}{7} \\ y=-\frac{1}{7} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{34}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases}$

171 $\begin{cases} 9x^2+5y^2=-3 \\ x^2+4xy-3y^2=8 \end{cases}$ sol impossbile

172 $\begin{cases} 2x^2-4xy-3y^2=18 \\ xy-2x^2+3y^2=-18 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$

173 $\begin{cases} x^2+2xy=-\frac{7}{4} \\ x^2-4xy+4y^2=\frac{81}{4} \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ y=-\frac{11}{8} \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\frac{7}{4} \\ y=\frac{11}{8} \end{cases}$

174 $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2-16=0 \\ x^2-xy+4y^2-6=0 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

175 $\begin{cases} x^2-2xy+y^2-1=0 \\ x^2-2xy-y^2=1 \end{cases}$ sol $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi particolari

176 $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ R. $(1;1),(3;-3)$

177 $\begin{cases} (x-2y)(x+y-2)=0 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$ R. $(3;-1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

178 $\begin{cases} (x+y-1)(x-y+1)=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$ R. $(1;0),(-3;-2)$

179 $\begin{cases} (x-3y)(x+5y-2)=0 \\ (x-2)(x-y+4)=0 \end{cases}$ R. $(2;0),\left(2;\frac{2}{3}\right);(-6;-2);(-3;1)$

180 $\begin{cases} (x^2-3x+2)(x+y)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ R. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ doppia; $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

181 $\begin{cases} (x-y)(x+y+1)(2x-y-1)=0 \\ (x-3y-3)(x+y-2)=0 \end{cases}$ R. $(0;-1)$ doppia $;\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right);(1;1)$ doppia

182 $\begin{cases} (4x^2-9y^2)(x^2-2xy+y^2-9)=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ R. $(5;8);\left(\frac{3}{2};1\right);(-1;-4);\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$

183 $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2-4=0 \\ (x^2-y^2)(2x-y-4)=0 \end{cases}$ R. $(1;-1),(2;0),(-1;1),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{10}{7};-\frac{8}{7}\right)$

184 $\begin{cases} x^2-2xy-8y^2=0 \\ (x+y)(x-3)=0 \end{cases}$ R. $(0;0)$ doppia $,\left(3;-\frac{3}{2}\right);(3;\frac{3}{4})$

185 $\begin{cases} (2x^2-3xy+y^2)(x-y-1)=0 \\ (x^2-4xy+3y^2)(12x^2-xy-y^2)=0 \end{cases}$ R. $(t;t),\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{5};-\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

186 $\begin{cases} (x-2y-2)(x^2-9y^2)=0 \\ (4x^2-4xy+y^2)(y+2)(x-y)=0 \end{cases}$ $(0;0)$ tripla $,(-2;-2)$ doppia $,\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ doppia $,(6;-2),(-6;-2)$

187 $\begin{cases} x^4-y^4=0 \\ x^2-(y^2-6y+9)=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

188 $\begin{cases} (y^2-4y+3)(x^2+2x-15)=0 \\ (x^2-3xy+2y^2)(9x^2-6xy+y^2)=0 \end{cases}$

R. $(1;1),(2;1)(3;3)$ doppia $,(6;3),\left(\frac{1}{3};1\right),(1;3),(-5;-5),\left(-5;-\frac{5}{2}\right),\left(3;\frac{3}{2}\right),(-5;-15),(3;9)$

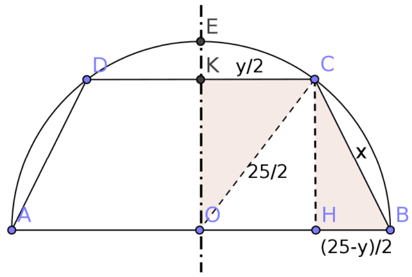
189 $\begin{cases} (x-y)(x+4y-4)(x+y-1)(3x-5y-2)=0 \\ (3x+y-3)(x^2-4y^2)=0 \end{cases}$

R. $(0;0)$ doppia $,\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right),(1;0),\left(\frac{8}{11},\frac{9}{11}\right),\left(\frac{17}{18};\frac{1}{6}\right),\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right),(-4;2)(2;-1),\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{4}{11};-\frac{2}{11}\right),(4;2)$

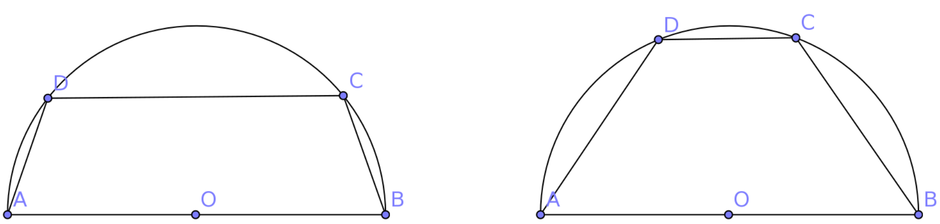
►4. Problemi che si risolvono con sistemi di grado superiore al primo

Riprendiamo un problema già trattato nel capitolo secondo di questo volume, per notare come questo problema, come altri nella loro formalizzazione sono risolvibili con sistemi di secondo grado.
Considerare più variabili ci permette di facilitare il processo di traduzione in linguaggio matematico delle relazioni che coinvolgono i dati del problema. Utilizzeremo per questo problema anche un'altra strategia risolutiva, per evidenziare che non esiste un solo modo per risolvere un problema..

<u>Problema</u>
Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura $25(cm)$; determinare le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è $62\,(cm)$.

<u>Dati</u>	<u>Vincoli</u>	<u>Relazioni tra dati e incognite</u>	
$\overline{AB}=25$ $2\,p=62$ $\overline{AB}\|\overline{DC}$ $\overline{AD}\equiv\overline{CB}$ <u>Obiettivo</u> $?\ \overline{CB}$ $?\ \overline{DC}$ <u>Incognite</u> $\overline{CB}=x$ $\overline{DC}=y$	$\begin{cases}0<x<\frac{25}{2}\sqrt{2}\\0<y<25\end{cases}$ <u>Altre Informazioni</u> $\overline{KO}=\overline{CH}$ $\overline{CO}=\frac{25}{2}$ $\overline{KC}=\frac{\overline{DC}}{2}$ $\overline{HB}=\frac{25-y}{2}$ $\widehat{CKO}=90°$ $\widehat{CHB}=90°$	$\begin{cases}y+2\,x+25=62\\\left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=x^2-\left(\frac{25-y}{2}\right)^2\end{cases}$ $\begin{cases}y=-2\,x+37\\x^2-25\,x+150=0\end{cases}$ <u>Soluzioni</u> $\begin{cases}x_1=15\\y_1=7\end{cases}\vee\begin{cases}x_2=10\\y_2=17\end{cases}$ <u>Verifica</u> Entrambe le soluzioni sono accettabili	

La risoluzione del problema si basa oltre che sulla <u>equazione</u> di primo grado $y+2\,x+25=62$ che definisce il perimetro e sulla congruenza dei segmenti $\overline{KO}$ e $\overline{CH}$ facilmente dimostrabile in quanto stessa distanza tra due rette parallele insieme all'applicazione del teorema di Pitagora ai triangoli CKB e CHB rettangoli per costruzione. Naturalmente tutte le informazioni ausiliare vanno dimostrate, ma data la loro facilità la lasciamo al lettore.
Importante è impostare le condizioni sulle incognite che devono essere maggiori di 0 ma anche per la $x<\frac{25}{2}\sqrt{2}$ perché il trapezio non diventi un triangolo e per la $y<25$ perché la base minore sia realmente minore.
L'ultimo passo consiste nella verifica delle soluzione, che nel nostro caso sono entrambe accettabili.
Si hanno dunque due trapezi inscritti in quella semicirconferenza che avranno il perimetro di 62(cm), come rappresentato in figura.



Problema

L'azienda Profit intende fare una ristrutturazione riducendo il numero degli operai. Oggi spende per gli operai (tutti con lo stesso stipendio) 800 € al giorno. Se si licenziassero 5 dipendenti e si riducesse lo stipendio di 2 € al giorno si avrebbe un risparmio giornaliero di 200 €. Quanti sono gli operai attualmente occupati nell'azienda?

Dati

- Spesa per salari al giorno= 800 €
- Riduzione salario giornaliero= 2 €
- Riduzione numero operai= 5 *unità*
- Risparmio a seguito del licenziamento e della riduzione di stipendio= 200 €

Obiettivo

- Numero operai occupati prima della ristrutturazione

Incognite

- x = numero operai prima della ristrutturazione
- y = salario percepito prima della ristrutturazione

Vincoli

- $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

Altre Informazioni

- Numero operai dopo la ristrutturazione= $x-5$
- Salario dopo la ristrutturazione= $y-2$
- Spesa per stipendi dopo la ristrutturazione= $800-200=600$ €

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} xy=800 \\ (x-5)(y-2)=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ xy-2x-5y+10=600 \end{cases}$$
$$\begin{cases} xy=800 \\ 2x+5y=210 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=25 \\ y_1=32 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=80 \\ y_2=10 \end{cases}$$

Verifica

Entrambe le soluzioni sono accettabili

Naturalmente c'è una grande differenza tra percepire 32 €/giorno di salario al giorno o 10 €/giorno, come avere impiegati 25 o 80 operai. Il problema va meglio definito. Basterebbe per questo un vincolo che ci dice qual'è la paga minima giornaliera di un operaio.

Problema

Un numero $k \in \mathbb{N}$ è composto da tre cifre. Il prodotto delle tre cifre è 42. Se si scambia la cifra delle decine con quella delle centinaia si ottiene un numero che supera k di 360. Se si scambia la cifra della unità con quella delle centinaia si ottiene un numero minore di 99 rispetto al numero k. Trovare k.

Dati

- Il numero k è composto da tre cifre
- Prodotto delle tre cifre = 42
- Scambiando la cifra delle decine con quella delle centinaia, il numero l che si ottiene è uguale a $k+360$
- Scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, il numero m che si ottiene è uguale a $k-99$

Obiettivo

- Trovare il numero k

Incognite

- x = cifra che rappresenta il numero delle centinaia
- y = cifra che rappresenta il numero delle decine
- z = cifra che rappresenta il numero delle unità

Vincoli

$$\begin{cases} x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ y, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \end{cases}$$

Altre Informazioni

- $k=100x+10y+z$
- $l=100y+10x+z$
- $m=100z+10y+x$

Relazioni tra dati e incognite

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z=42 \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+360 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z=42 \\ x-y=-4 \\ x-z=1 \end{cases}$$

Soluzioni

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=7 \\ z_1=2 \end{cases}$$

Verifica

La soluzione soddisfa le condizioni il numero cercato è 372

190 In un rettangolo la differenza tra i due lati è uguale a $2\,cm$. Se si diminuiscono entrambi i lati di 1 cm si ottiene un'area di $0{,}1224\,m^2$. Calcolare il perimetro del rettangolo. R. $[2p=144\,cm]$

191 Trova due numeri sapendo che la somma tra i loro quadrati è 100 e il loro rapporto $\frac{3}{4}$.
R. $[(-6;-8)\vee(6,8)]$

192 La differenza tra due numeri è $\frac{11}{4}$ e il loro prodotto $\frac{21}{8}$. Trova i due numeri.
R. $\left[\left(-\frac{3}{4};-\frac{7}{2}\right)\vee\left(\frac{7}{2},\frac{3}{4}\right)\right]$

193 Trovare due numeri positivi sapendo che la metà del primo supera di 1 il secondo e che il quadrato del secondo supera di 1 la sesta parte del quadrato del primo. R. $[(12;5)]$

194 Data una proporzione tra numeri naturali conosciamo i due medi che sono 5 e 16. Sappiamo anche che il rapporto tra il prodotto degli estremi e la loro somma è uguale a $\frac{10}{3}$. Trovare i due estremi.
R. $[(4;20)\vee(20,4)]$

195 La differenza tra un numero di due cifre con quello che si ottiene scambiando le cifre è uguale a 36. La differenza tra il prodotto delle cifre e la loro somma è uguale a 11. Trovare il numero. R. $[73]$

196 Oggi la differenza delle età tra un padre e una figlia è 26 anni, mentre due anni fa il prodotto delle loro età era 56. Determina l'età del padre e della figlia. R. $[30;4]$

197 La somma delle età di due fratelli oggi è 46 anni, mentre fra due anni la somma dei quadrati delle loro età sarà 1250. Trova l'età dei due fratelli.
R. $[23;23]$

198 Ho comprato due tipi di vino. In tutto 30 bottiglie. Per il primo tipo ho speso 54 € e per il secondo 36€. Il prezzo di una bottiglia del secondo tipo costa 2,5 € in meno di una bottiglia del primo tipo. Trova il numero delle b ottiglie di ciascun tipo che ho acquistato e il loro prezzo unitario.
R. $[I\ tipo=12\ bottiglie\ ;\ II\ tipo=18\ bottiglie]$

199 In un triangolo rettangolo di area $630\,m^2$, l'ipotenusa misura $53\,m$. Determinare il perimetro $[2p=126\,m]$.

200 Un segmento di $35\,cm$ viene diviso in due parti. La somma dei quadrati costruiti su ciascuna delle due parti è $625\,cm^2$. Quanto misura ciascuna parte? R. $[15\,cm\ \text{e}\ 20\,cm]$.

201 Se in un rettangolo il perimetro misura 16,8 m. e l'area 17,28 mq, quanto misura la sua diagonale?
R. $[Diagonale=6\ m]$

202 In un triangolo rettangolo la somma dei cateti misura 10,5 cm, mentre l'ipotenusa è 7,5 cm. Trovare l'area. R. $[Area=13{,}5\,cm^2]$

203 Quanto misura un segmento diviso in due parti, tali che una parte è $\frac{3}{4}$ dell'altra, sapendo che la somma dei quadrati costruiti su ognuna delle due parti è uguale a $121\,cm^2$? R. $[15{,}4\,cm]$

204 Un trapezio rettangolo con area di $81\,m^2$ la somma della base minore e dell'altezza è $12\,cm$ mentre la base minore è $\frac{1}{5}$ della base maggiore. Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $2p_1=42\vee 2p_2=57+3\sqrt{145}$

205 La differenza tra le diagonali di un rombo è $8\,cm$, mentre la sua area è $24\,cm^2$. Determinare il lato del rombo. R. $[2\sqrt{10}]$

206 Sappiamo che in un trapezio rettangolo con area di $40\,cm^2$ la base minore è $7\,cm$, mentre la somma della base maggiore e dell'altezza è $17\,cm$. Trovare il perimetro del rettangolo.
R. $[2p=24+2\sqrt{13}]$

207 Nella produzione di un oggetto la macchina A impiega 5 minuti in più rispetto alla macchina B. Determinare il numero di oggetti che produce ciascuna macchina in 8 ore se in questo periodo la macchina A ha prodotto 16 oggetti in meno rispetto alla macchina B. $[A=32\ oggetti\ ,\ B=48\ oggetti]$

208 Un rettangolo ha l'area equivalente a quella di un quadrato. L'altezza del rettangolo è $16\,cm$, mentre la sua base è di $5\,cm$ maggiore del lato del quadrato. Determinare il lato del quadrato.
R. $[20\,cm]$

209 La differenza tra cateto maggiore e cateto minore di un triangolo rettangolo è $7\,k$, mentre la sua area è $60\,k^2$. Calcola il perimetro. (k>0)
R. $[2p=40\,k]$

210 L'area di un rettangolo che ha come lati le diagonali di due quadrati misura $90\,k^2$. La somma dei lati dei due quadrati misura $14\,k$. Determinare i lati dei due quadrati. (k>0) R. $[5\,k\ ,\ 9\,k]$

211 Nel rettangolo ABCD la differenza tra altezza e base è $4\,k$. Se prolunghiamo la base ab, dalla parte di B di $2\,k$ fissiamo il punto E. L'area del trapezio AECD che si ottiene congiungendo E con C è $28\,k^2$. Trovare il perimetro del trapezio. (k>0)
R. $[15+k\sqrt{53}]$

212 In un triangolo isoscele la base è $\frac{2}{3}$ dell'altezza. La sua area misura $12\,k^2$. Trova il perimetro del triangolo.
R. $[4+4\,k\sqrt{10}]$

Autori

Francesco Daddi: teoria, esercizi
Riccardo Sala: teoria
Claudio Carboncini: teoria, editing
Anna Cristina Mocchetti: correzioni
Antonio Bernardo: coordinamento

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 1.1 del 17.04.2011