

# Le potenze

Def.

Si chiama **POTENZA** il prodotto di  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) fattori tutti uguali fra loro. Il fattore che si ripete è chiamato **BASE**, il numero delle volte che si ripete è detto **ESPONENTE**.

$$a^n = b$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} = b$$

$a$  è la **BASE**

$n$  è l'**ESPONENTE**

$b$  è la **POTENZA**

Esempi:

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

5 base, 3 esponente, 125 potenza

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$0,05^3 = 0,05 \cdot 0,05 \cdot 0,05 = 0,000125$$

## Casi particolari

1. Se l'esponente è 2 si può leggere "al **quadrato**". Es.  $23^2$  si può leggere 23 al quadrato (o 23 alla seconda).
2. Se l'esponente è 3 si può leggere "al **cubo**". Es.  $17^3$  si può leggere 17 al cubo (o 17 alla terza).

Def.

Si chiama **ELEVAMENTO A POTENZA** l'operazione con cui si calcola la potenza di un numero.

Per elevare a potenza si deve:

1. Sviluppare la potenza, cioè si trasforma in moltiplicazione
2. Si calcola il prodotto

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$\rightarrow 2^4 = 16$$

## Proprietà delle potenze

### 1. Prodotto di due o più potenze con la STESSA BASE

$$5^4 \cdot 5^3 =$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$$

$$5^7$$

$$3 \cdot 3^2 \cdot 3^5 =$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$3^8$$

Il prodotto di due o più potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la SOMMA degli esponenti.

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p} \quad m, n, p \in \mathbb{N}$$

Es.

$$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = 4^8$$

### 2. Quoziente di potenze con la STESSA BASE

$$5^5 : 5^3 =$$

$$(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5 \cdot 5) = \quad \text{applico l'invariantiva e divido dividendo e divisore per 5:}$$

$$(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = \quad \text{applico l'invariantiva e divido dividendo e divisore per 5:}$$

$$(5 \cdot 5 \cdot 5) : (5) = \quad \text{applico l'invariantiva e divido dividendo e divisore per 5:}$$

$$(5 \cdot 5) : 1 =$$

$$5^2$$

Il quoziente di due potenze che hanno la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la DIFFERENZA degli esponenti.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Es.

$$4^7 : 4^5 = 4^{7-5} = 4^2$$

**ATTENZIONE!!!**

**NON CI SONO PROPRIETÀ PER ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DI POTENZE CON LA STESSA BASE!**

$5^2 + 5^3$  NON FA  $5^5$ !!! si devono calcolare le potenze:

$$5^2 + 5^3 = 25 + 125 = 150$$

$2^5 - 2^2$  NON FA  $2^3$ !!! si devono calcolare le potenze:

$$2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$$

### 3. Potenza di una potenza

$$(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}$$

$$(3^7)^4 = 3^7 \cdot 3^7 \cdot 3^7 \cdot 3^7 = 3^{7+7+7+7} = 3^{28}$$

La potenza di una potenza è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il **PRODOTTO** degli esponenti.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Es.

$$(4^3)^5 = 4^{3 \cdot 5} = 4^{15}$$

### 4. Prodotto di due o più potenze aventi lo stesso ESPONENTE

$$\begin{aligned} 7^2 \cdot 3^2 &= 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 = && \text{applico la commutativa} \\ &= 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = \\ &= 21 \cdot 21 = 21^2 \end{aligned}$$

Il prodotto di due o più potenze aventi lo stesso esponente è una potenza avente per base il **PRODOTTO** delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n = (a \cdot b \cdot c)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

Es.

$$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4$$

### 5. Quoziente di due potenze aventi lo stesso ESPONENTE

Il quoziente di due potenze aventi lo stesso esponente è una potenza avente per base il **QUOZIENTE** delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$a^n : b^n = (a : b)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

Es.

$$15^4 : 3^4 = (15 : 3)^4 = 5^4$$

## Operazioni inverse dell'elevamento a potenza

L'elevamento a potenza ha due operazioni inverse:

1. Per calcolare la BASE: **ESTRAZIONE DI RADICE**
2. Per calcolare l'ESPONENTE: **LOGARITMO**

### 1. ESTRAZIONE DI RADICE

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{perché } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{perché } 2^5 = 32$$

$$\sqrt{64} = 8 \quad \text{perché } 8^2 = 64$$

### 2. LOGARITMO

$$\log_5 25 = 2 \quad \text{perché } 5^2 = 25$$

$$\log_7 49 = 2 \quad \text{perché } 7^2 = 49$$

$$\log_3 27 = 3 \quad \text{perché } 3^3 = 27$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \text{perché } 10^3 = 1000$$

$$\log_2 64 = 6 \quad \text{perché } 2^6 = 64$$

## Potenze particolari

1. potenze con esponente 1:  $a^1 = a$

Es.  $65^1 = 65$

$$153,8^1 = 153,8$$

2. Potenze con esponente 0:  $a^0 = 1$  ( $a \neq 0$ )

Es.  $15^0 = 1$

$$27^0 = 1$$

$$523,8^0 = 1$$

Perché? Supponiamo di voler calcolare

$$8^5 : 8^5 =$$

Possiamo ricavare il risultato applicando la seconda proprietà delle potenze, secondo cui

$$8^5 : 8^5 = 8^{5-5} = 8^0$$

Oppure possiamo applicare la quinta proprietà delle potenze, secondo cui

$$8^5 : 8^5 = (8 : 8)^5 = 1^5 = 1$$

Confrontando i risultati si ottiene che  $8^0 = 1$

3. Potenze con base 1:  $1^n = 1$

Es.  $1^{53} = 1$

4. Potenze con base 0:  $0^n = 0$  ( $n \neq 0$ )

Es.  $0^{15} = 0$

5. Potenza  $0^0$  NON HA SIGNIFICATO