

Linee di livello

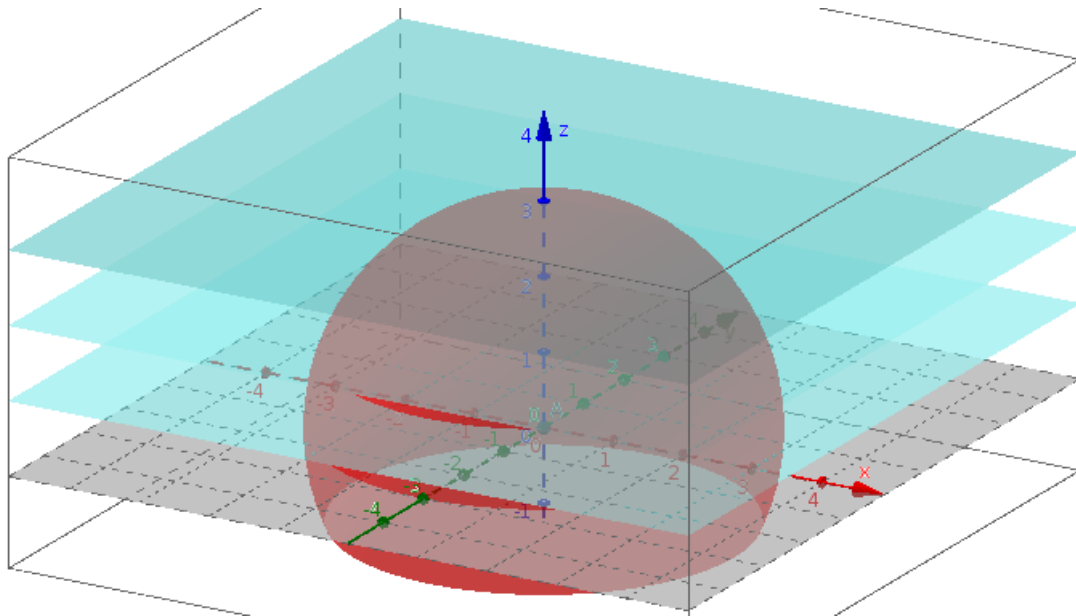
Le linee di livello si ottengono “affettando” la funzione con una serie di piani paralleli al piano xy; si ottengono, quindi, risolvendo per diversi valori di k, il seguente sistema:

$$\begin{cases} z=f(x, y) \\ z=k \end{cases} \Rightarrow f(x, y)=k$$

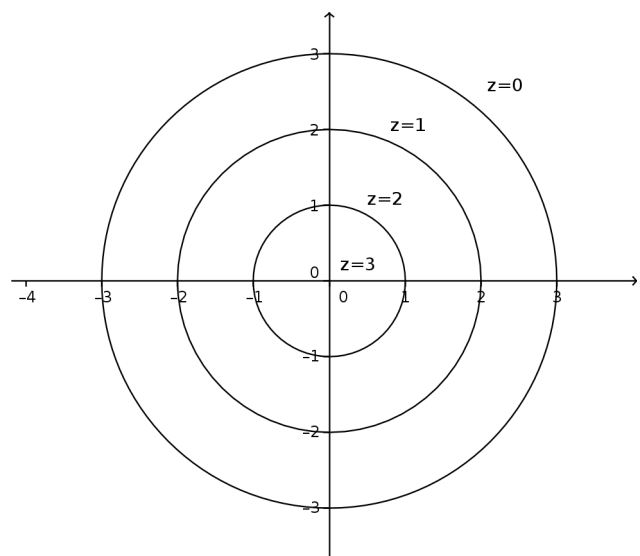
Tutti i punti sulla linea di livello hanno la stessa quota.

Esempio

Si consideri la funzione $x^2+y^2+z^2=9$, le linee di livello che si ottengono intersecando la funzione con i seguenti piani $z=0, z=1, z=2, z=3$, sono:



Le linee di livello, proiettate sul piano xy sono:



Esercizi

1. Linee di livello di $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
 calcoliamo prima di tutto il dominio:

$$x^2 + y^2 \geq 0 \rightarrow D = \mathbb{R}^2$$

Trovo le linee di livello:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = k \Rightarrow$$

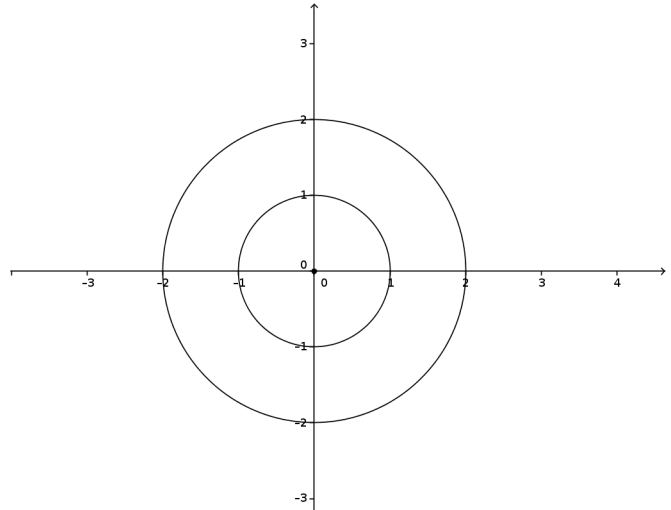
$x^2 + y^2 = k^2$ è l'equazione di un fascio di circonferenze con centro nell'origine
 calcolo le seguenti linee di livello:

$$k=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

$$k=1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$k=2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

e disegno le proiezioni sul piano xy



2. Determina il dominio della funzione $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \log(4x - x^2 - y)$
 calcoliamo il dominio:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x - x^2 - y > 0 \end{cases}$$

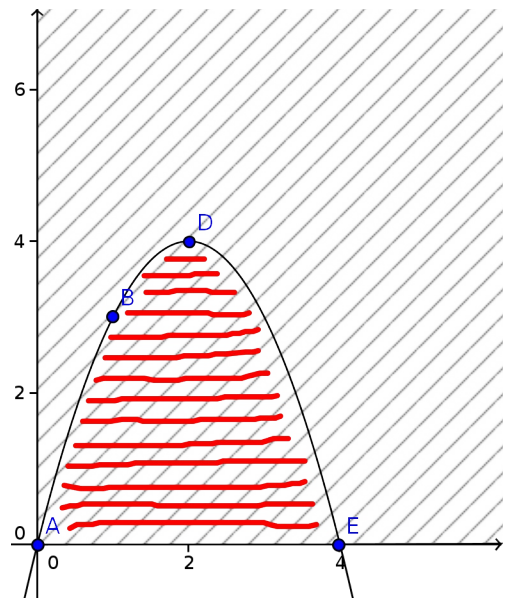
equazione associata alla terza disequazione: $4x - x^2 - y = 0$

cioè: $y = -x^2 + 4x$ è l'equazione di una parabola che disegno per punti:

x	y
0	0
1	3
-1	-5
2	4
4	0

E risolviamo per via grafica. Il dominio è quello tratteggiato in rosso: risulta dalla soluzione del sistema delle prima due disequazioni ($x \geq 0$ e $y \geq 0$) e della terza disequazione verificata prendendo un punto e sostituendo le coordinate nella disequazione (non possiamo prendere l'origine, perché $(0,0)$ è un punto della parabola):
 $P(1,0)$

$$4 * 1 - 1^2 - 0 > 0 \rightarrow 4 - 1 > 0 \rightarrow 3 > 0 \text{ Sì, quindi la soluzione è "sotto" la parabola}$$



3. Linee di livello di $z = 3x - y + 2 \rightarrow D = \mathbb{R}^2$

$3x - y - z + 2 = 0$ è l'equazione di un piano nello spazio; le linee di livello sono delle rette.

Troviamo le curve di livello:



$$\begin{cases} z=3x-y+2 \\ z=k \end{cases} \Rightarrow 3x-y+2=k$$

$3x-y+2-k=0$ è l'equazione di un fascio di rette improprio, cioè parallele (k è nel termine noto)

Calcoliamo alcune linee di livello:

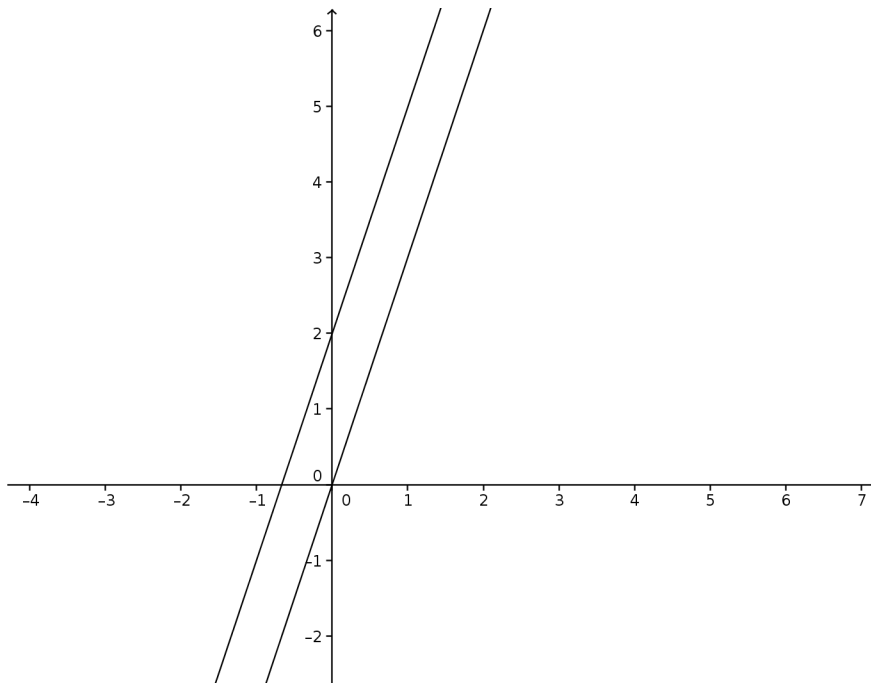
$$k=0 \Rightarrow 3x-y+2-0=0 \Rightarrow y=3x+2$$

$$k=2 \Rightarrow 3x-y+2-2=0 \Rightarrow y=3x$$

disegno la prima per punti:

x	y
0	0
1	3

L'altra retta è più su di 2 (dato che le rette sono parallele).



5. Linee di livello di $z = y - x^2 \rightarrow D = \mathbb{R}^2$

Troviamo le linee di livello:

$$\begin{cases} z = y - x^2 \\ z = k \end{cases} \Rightarrow y - x^2 = k$$

$y = x^2 + k$ è l'equazione di un fascio di parabole con il vertice sull'asse y

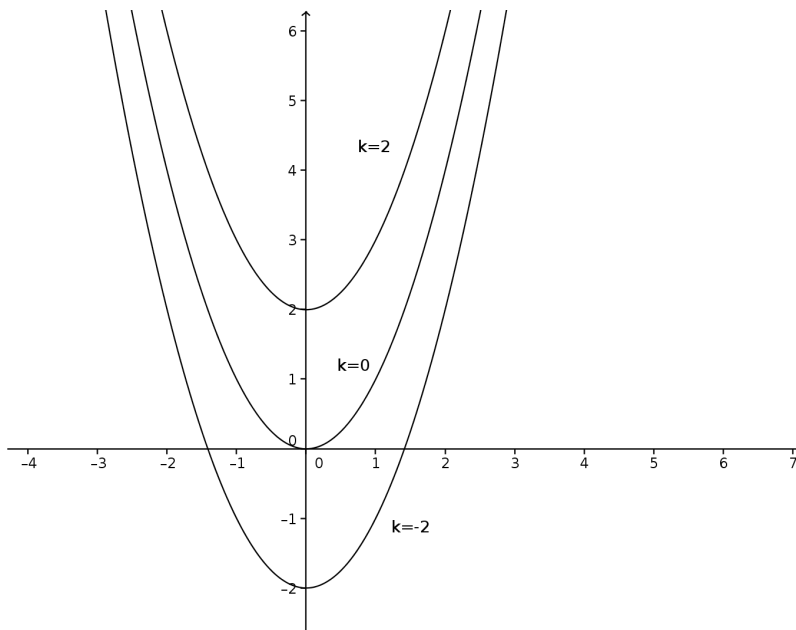
Calcoliamo alcune linee di livello:

$$k=0 \Rightarrow y = x^2$$

$$k=2 \Rightarrow y = x^2 + 2 \text{ (sale di 2 rispetto alla prima)}$$

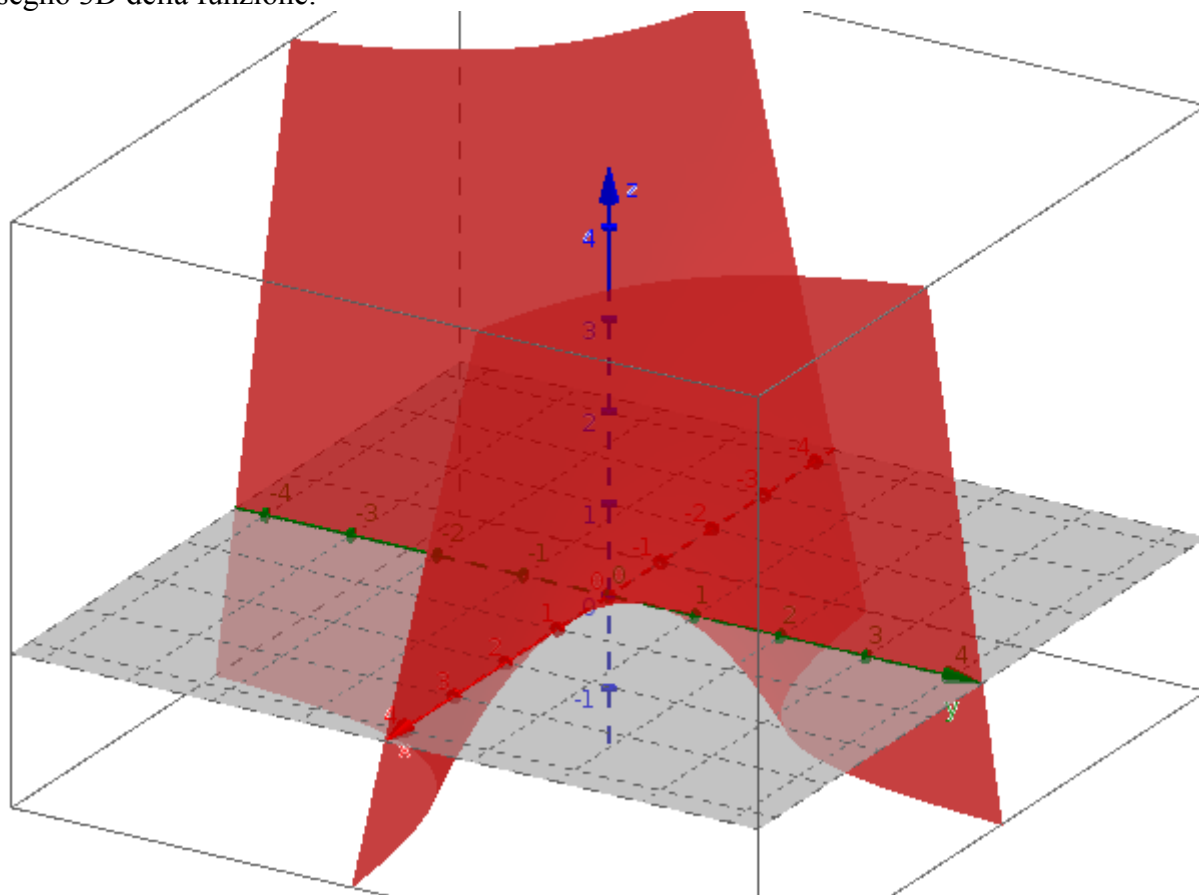
$$k=-2 \Rightarrow y = x^2 - 2 \text{ (cala di 2 rispetto alla prima)}$$

Disegnamole:



6. Linee di livello di $z=xy \rightarrow D=\mathbb{R}^2$

Disegno 3D della funzione:



Troviamo le linee di livello:

$$\begin{cases} z=xy \\ z=k \end{cases} \Rightarrow xy=k$$

$y=\frac{k}{x}$ è l'equazione di un

fascio di iperbole

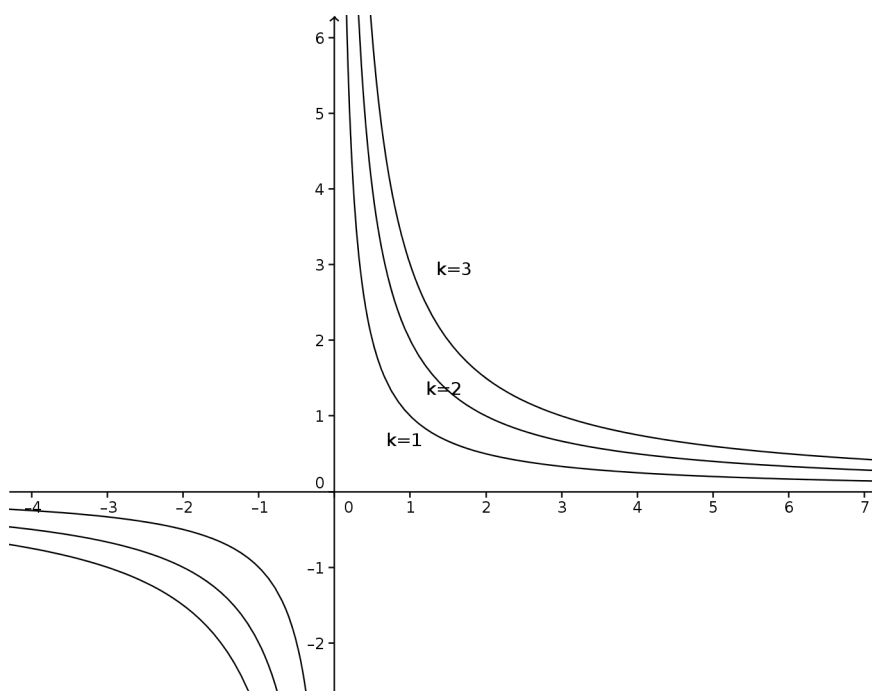
Calcoliamo alcune linee di livello:

$$k=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

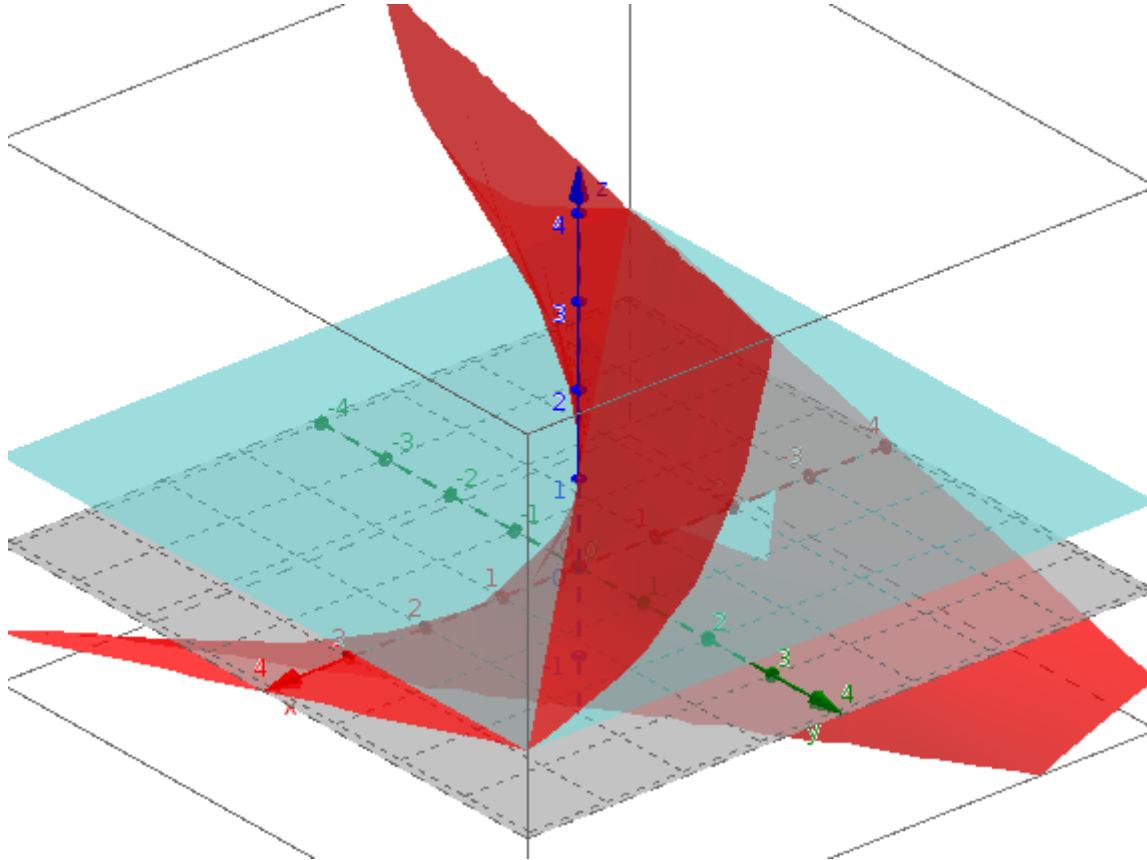
$$k=2 \Rightarrow y=\frac{2}{x}$$

$$k=3 \Rightarrow y=\frac{3}{x}$$

Disegniamole:



7. Linee di livello di $z = \frac{y}{x} \rightarrow x \neq 0$



Troviamo le linee di livello

$$\begin{cases} z = \frac{y}{x} \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = k$$

$y = kx$ è l'equazione di un fascio di rette improprio (con centro nell'origine)

Calcoliamone alcune:

$$k=0 \Rightarrow y=0$$

$$k=1 \Rightarrow y=x$$

$$k=2 \Rightarrow y=2x$$

Come si vede sono rette che passano per l'origine.

