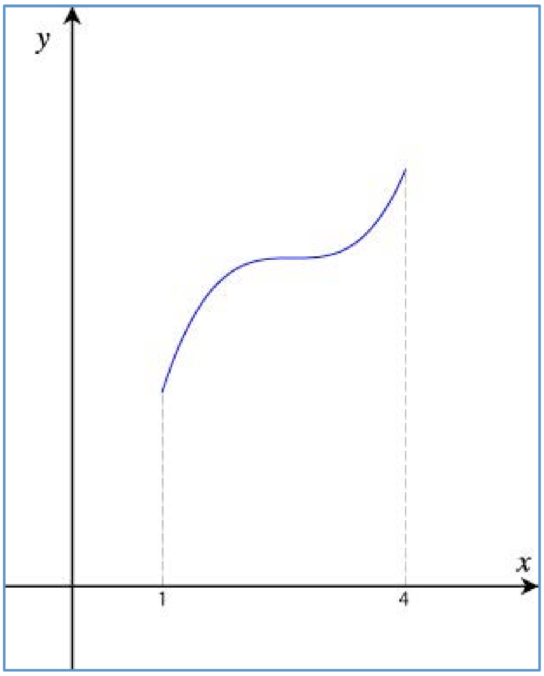
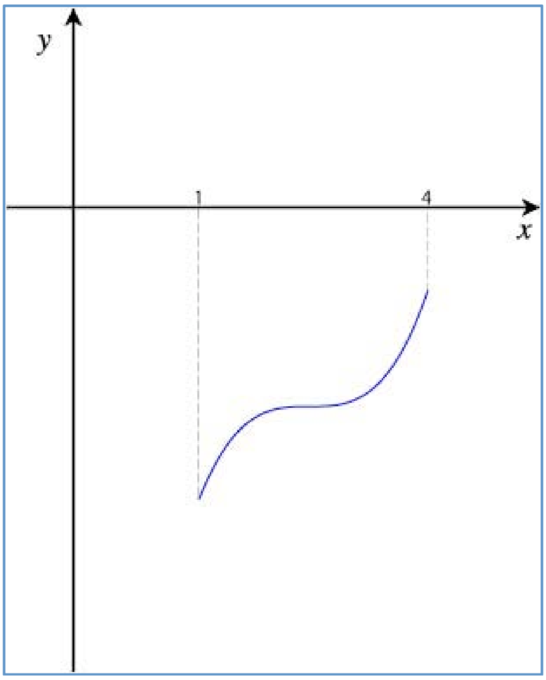
STUDIO DEL SEGNO DI UNA FUNZIONE

Quando si studia una funzione $y = f\ (x)$ (funzione reale di variabile reale) è fondamentale conoscere il segno, in altre parole sapere per quali valori di x, $f\ (x)$ è positiva, negativa o uguale a zero. Per esempio se supponiamo che nell'intervallo $[1\,;4]$ delle ascisse la funzione sia positiva, allora la parte di grafico corrispondente, in quell'intervallo, passerà nel semipiano superiore:

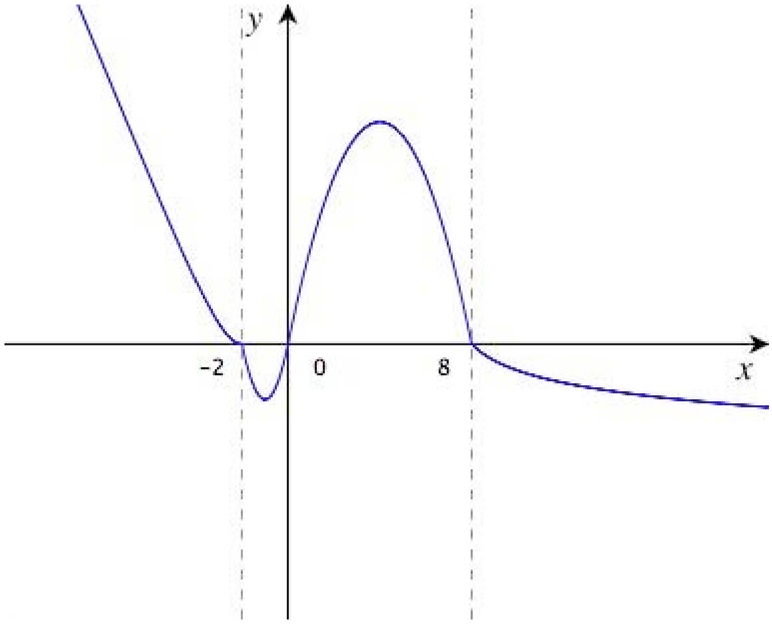


Se, viceversa, nell'intervallo $[1\,;4]$ delle ascisse la funzione è negativa, allora il grafico relativo passerà nel semipiano inferiore:



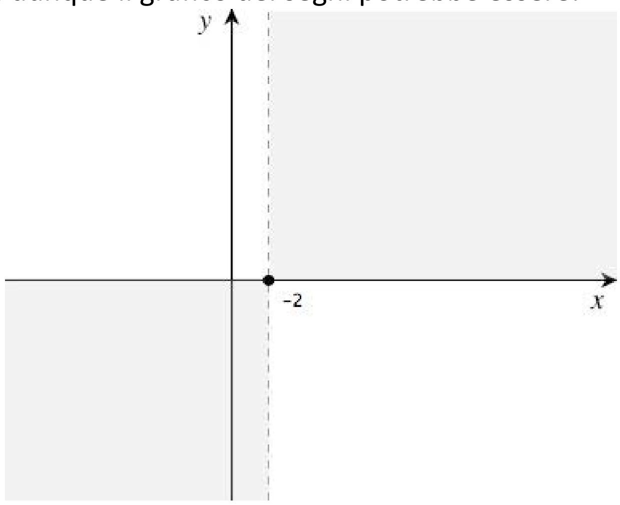
I punti $\bar{x}$ nei quali $f(\bar{x}) = 0$ sono i punti $(\bar{x}, 0)$ del grafico in cui la funzione attraversa l'asse X.

Se,per esempio, sappiamo che la funzione $y = f(x)$ è positiva in :$(-\infty, -2)$ ∪ $(0, 8)$, negativa in $(-2, 0)$ ∪ $(8, +\infty)$ e nulla in x_1=-2 , x_2=0 , x_3=8 allora uno dei grafici possibili sarebbe il seguente:



Il grafico riportato sopra, così come quelli precedenti, è solo indicativo dato che non abbiamo altre informazioni sulla funzione.
In tutti i casi, cosa si deve fare una volta che sono stati individuati gli intervalli dove la funzione è positiva, negativa, nulla?
In corrispondenza di tali intervalli si cancella la parte di semipiano nella quale la funzione non passa.

Per esempio supponiamo che per $x \in (-\infty, 2)$ si ha $f(x) > 0$ e che per $x \in (2, +\infty)$ si ha $f(x) < 0$ e che $f(2) = 0$, dunque il grafico dei segni potrebbe essere:



Facciamo ora degli esempi che riguardano funzioni di vario tipo e vediamo di volta in volta come affrontare lo studio del segno a seconda del tipo di funzione:

FUNZIONI POLINOMIALI

Sono del tipo: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .\,\dots\dots + a_{n-1}x + +a_n$ dove il secondo membro è un polinomio di grado n con $n \geq 3$ (se $n = 1$ la funzione èuna retta; se $n = 2$ è una parabola, funzioni già note dagli anni precedenti)
Ricordiamo che il Campo di esistenza (Dominio) di tali funzioni è l'insieme $\mathbb{R}$.
Per raggiungere lo scopo che ci siano prefissi occore:

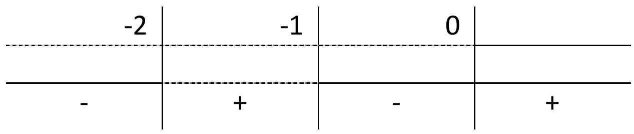
1) Scomporre il polinomio in polinomi di 1°e 2° grado dei quali sappiamo studiare il segno
2) Studiare il segno di ciascunno di essi e riportarlo in un grafico composto da tante righe quanti sono i fattori
3) La retta ($\mathbb{R}$) sarrà suddivisa in intervalli il cui segno sarà dato dalla regola della moltiplicazione dei segni presenti nelle varie righe
4) Si disegna un piano cartesiano e si cancellano le zone in cui la funzione non passa (come già detto precedentemente):

Esempio 5: $\boldsymbol{y = x^3 + 3x^2 + 2x}$

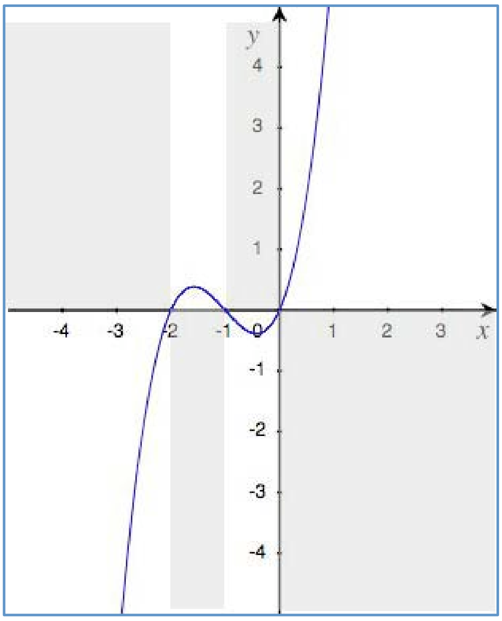
La funzione assegnata si può scomporre nel seguente modo: $y = x(x^2 + 3x + 2)$.
Studiamo i segni di x e $(x^2 + 3x + 2)$.
Il fattore x è positivo quando $x > 0$, negativo quando $x < 0$e uduale a 0 quando $x = 0$
Per studiare il segno di $x^2 + 3x + 2$ occorre:
Risolvere l'equazione associata $x^2 + 3x + 2$
Vedere il segno del termine di 2° grado
Trarre le relative conclusioni
Risolviamo l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Tale equazione ha dunque due radici reali e distinte $x_1 = -2 \quad x_2 = -1$
Il segno di x^2 è positivo, pertanto il polinomio di 2° grado è positivo all'esterno delle radici $(x < -2\,, x > -1)$ e negativo all'interno $(-2 < x < -1)$ e nullo in $x_1 = -2 \;\; e \;\; x_2 = -1$
Riportiamo in un grafico i segni dei due fattori ora studiati:



(nel grafico la riga continua indica la positività , quella discontinua la negativa) dal grafico dei segni ora svolto si vede che la funzione $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ è positiva per $x \in (-2, -1)$ e per $x \in (0, +\infty)$, negativa per $x \in (-\infty, -2)$ e per $x \in (-1, 0)$ e nulla in $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$.
Dunque riportando ciò in un piano cartesiano :



I punti del grafico (-2,0) , (-1,0) , (0,0) sono i punti in cui la funzione attraversa l'asse X .

Esempio 6: $\boldsymbol{y = -x^4 + 1}$

La funzione si può scomporre come $y = (1 - x^2)(1 + x^2)$
Studiamo i segni dei due polinomi:

$$1 - x^2$$

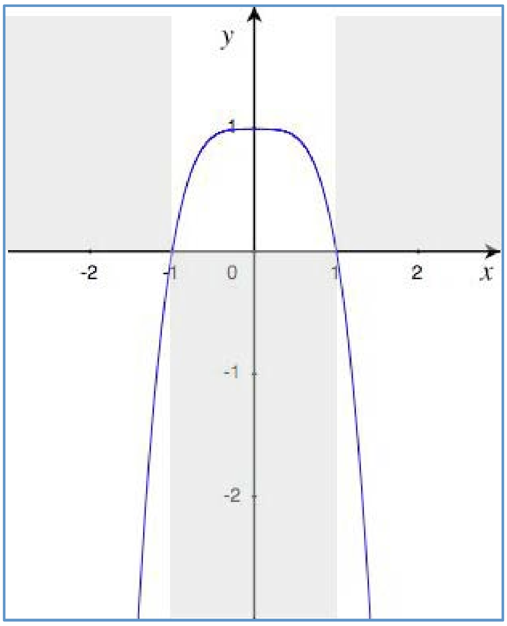
Risolviamo l'equazione $1 - x^2 = 0 \longrightarrow \ x^2 = 1 \ \longrightarrow x = \pm 1$
Il coefficiente di x^2 è negativo pertanto $1 - x^2$ è positivo all'interno delle radici, negativo all'esterno e nullo in $x_1 = -1 \quad x_2 = 1$.

$$1 + x^2$$

Risolviamo l'equazione $1 + x^2 = 0 \longrightarrow \ x^2 = -1$
Tale equazione non ha soluzioni. Il coefficiente di x^2 è positivo, dunque il segno di $1 + x^2$ è positivo per ogni x (in tutto $\mathbb{R}$).
Facciamo il grafico dei segni:

		-1		1	
1°	- - - - - -		——————		- - - - - -
2°	——————		——————		——————
	$-$		$+$		$-$

Dal grafico dei segni si evince che la funzione è positiva per $x \in (-1, 1)$, negativa per $x \in (-\infty, -1)$ o $x \in (1, +\infty)$ e nulla quando $x = -1 \ o \ x = 1$.
Riportando gli esiti dello studio della funzione $y = -\,x^4 + 1$ in un piano cartesiano si ha:



Esempio 7: $\boldsymbol{y = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6}$

Per scomporre tale polinomio ricorriamo al metodo di Ruffini e sostituiamo al posto di x i possibili divisori di 6 che sono ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 per $x = -1 \rightarrow y = 0$ per cui il polinomio è divisibile per $(x+1)$ e inoltre:

	1	-3	-3	7	6
-1		-1	4	-1	-6
	1	-4	1	6	=

Quindi $x^2 - 3x^2 - 3x^{2+}7x + 6 = (x+1)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$ ora scomporre il polinomio $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Procedendo come prima si trova anche in questo caso che per $x = -1 \rightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Pertanto la nostra funzione è ancora divisibile per $x + 1$, quindi è divisibile per $(x+1)^2$,inoltre

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	

Pertanto la funzione $y = x^4 - 3x^2 - 3x^2 + 7x + 6$ si può scrivere $y = (x+1)^2\ (x^2 - 5x + 6)$

Possiamo ora studiare i segni di$(x+1)^2$ e di $x^2 - 5x + 6)$

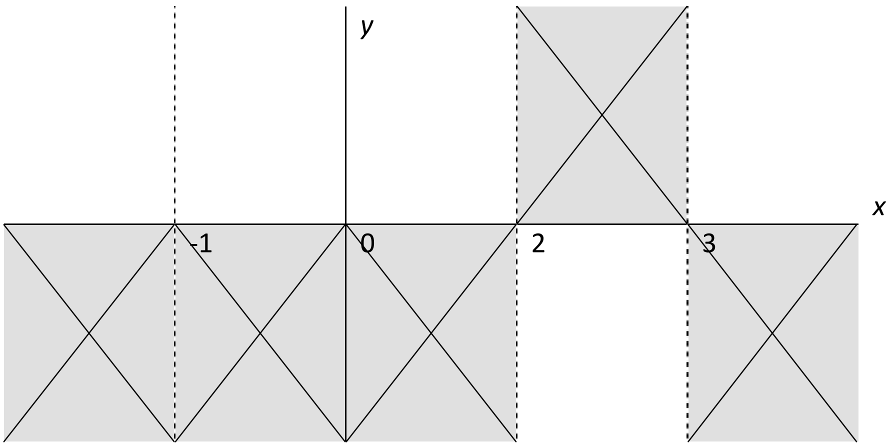
$(x+1)^2$ è sempre positivo perchè è un quadrato con le sole eccezioni di $x = -1$ poichè per quel velore $x + 1 = 0$ e quindi $(x+1)^2 = 0$. Risolviamo l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

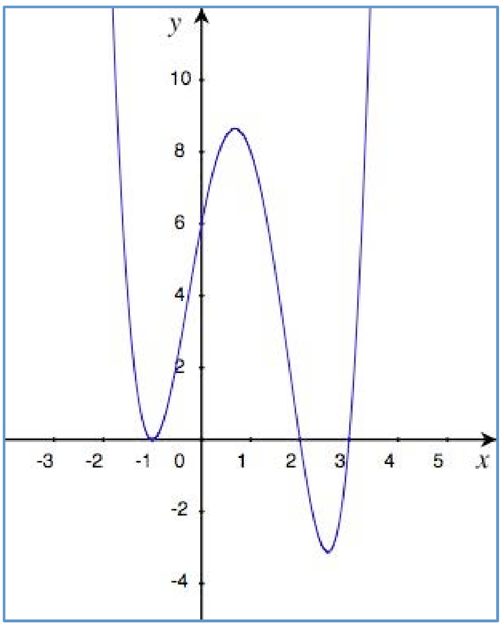
Poichè il segno di x^2 è positivo, $x^2 - 5x + 6$ è positivoall'estremodelle radici, negativo all'interno ed è nulla per $x = 2$ o $x = 3$. Segue il grafico:

	-1	2	3	
1°				
2°				
	+	+	-	+

Quindi la funzione è positiva per $x\epsilon(-\infty,-1), x\epsilon(-1,2)$ e $x\epsilon(3,+\infty)$; mentre è negativa per $x\epsilon(2,3)$ ed è nulla in $x=-1,\ x=2, x=3$.
Riportando tali risultati in un piano cartesiano si ha:



Il grafico della funzione è



FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Sono funzioni $y = f(x)$ in cui $f(x)$ è una frazione algebrica. Es. $y = \frac{2x-1}{x^2+3}$
Per studiare il segno di una funzione di questo tipo occorre:

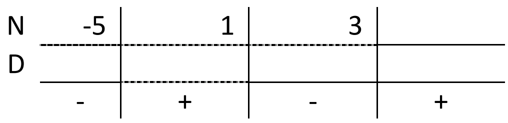
a) Studiare il segno del numeratore;
b) Studiare il segno del denominatore;
c) Fare il grafico dei segni corrispondenti;
d) Riportare gli esiti del grafico sul piano cartesiano.

Esempio 8: $\boldsymbol{y = \frac{x-3}{x^2+4x-5}}$

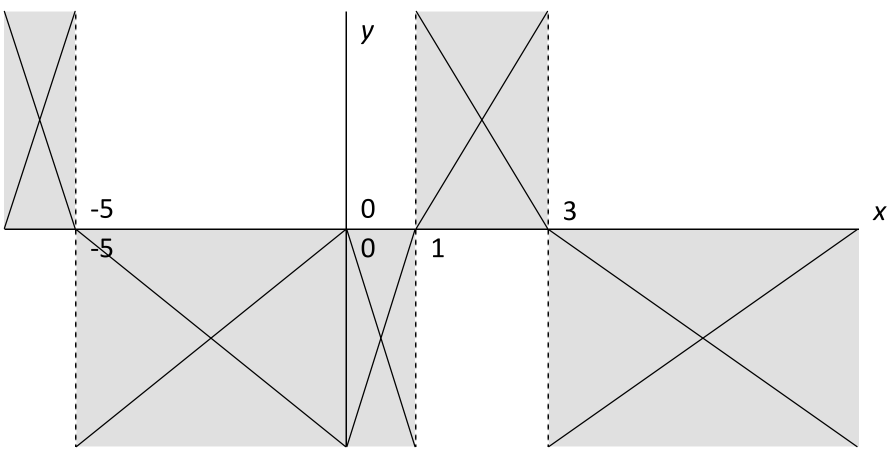
$x - 3 \geq 0 \longrightarrow x \geq 3$

$x^2 + 4x - 5 > 0 \longrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3 = \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow -5}{\searrow 1}$ (è stata applicata la formula ridotta)

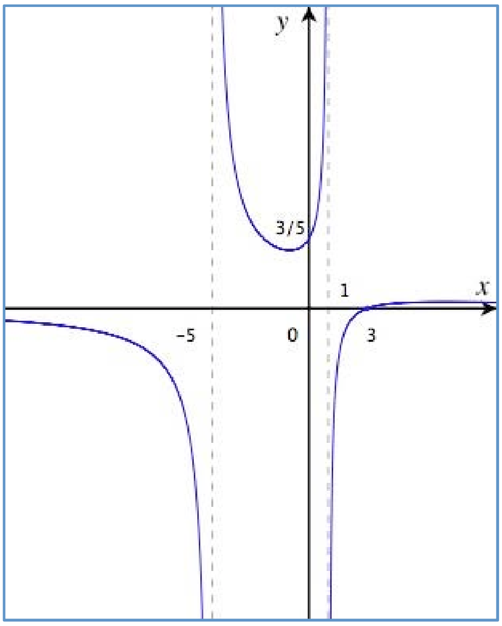
Il denominatore si annulla per $x = -5$ e $x = 1$ (valori che non fanno parte del dominio della funzione assegnata) e poiché il coefficiente di x^2 è positivo, il polinomio sarà positivo all'esterno di tali valori (cioè per $x < -5$ o $x > 1$) e negativo all'interno (cioè per $-5 < x < 1$)
Ecco dunque il grafico dei segni



Riportiamone ora gli esiti sul piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



La funzione passa per il punto (3,0) mentre le rette $x = -5$ ed $x = 1$ sono gli asintoti verticali.

Esempio 9: $y = \frac{x^2 - x}{9 - x^2}$

1°) $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

Il numeratore ha due radici distinti, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ e poiché il coefficiente di x^2 è positivo, il polinomio è positivo all'esterno delle radici e negativo all'interno.

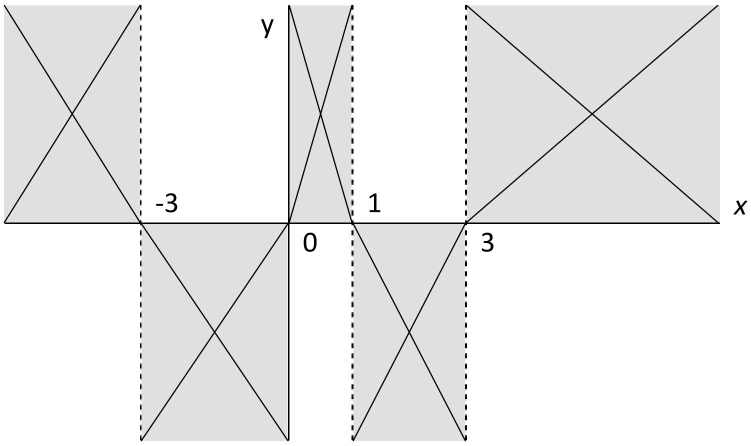
2°) $9 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Il denominatore ha due radici distinte, $x_1 = -3$ *e* $x_2 = 3$ e, poiché il coefficiente del termine di 2° grado è negativo, il polinomio è positivo all'interno e negativa all'esterno (i valori $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$ vanno esclusi dal campo di esistenza).

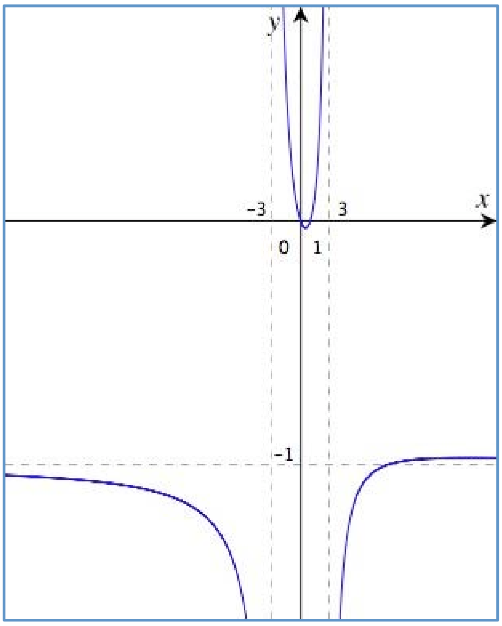
Il grafico dei segni, pertanto, sarà:

	-3	0	1	3	
1°					
2°					
	-	+	-	+	-

Riportiamo sul piano cartesiano i risultati del grafico dei segni:



La funzione passa per i punti $(0,0)$ e $(1,0)$, mentre le rette $x=-3$ e $x=3$ sono gli asintoti verticali.
Il grafico della funzione è:

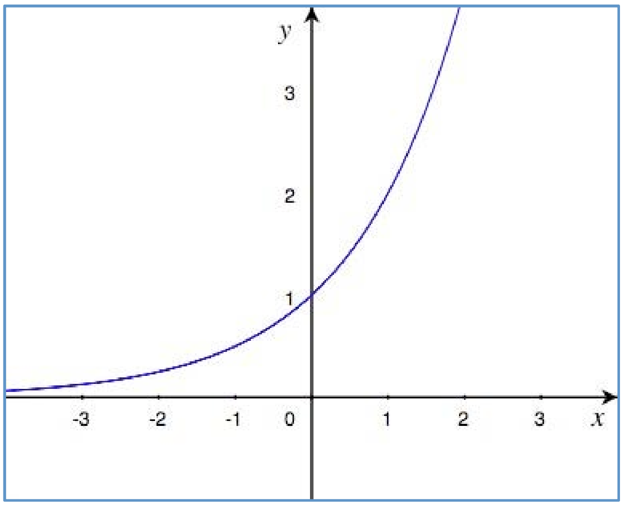


La funzione passa per i punti $(0,0)$ e $(1,0)$, le rette $x=-3$ ed $x=3$ sono gli asintoti verticali, mentre la retta $y=-1$ è asintoto orizzontale.

FUNZIONI ESPONENZIALI

Cominciamo col considerare una funzione esponenziale semplice del tipo $y = a^x$ dove a ricordiamolo, deve essere una base positiva. In tal caso il segno di a^x è sempre maggiore di zero per ogni x.

Esempio 1: $y = 2^x$



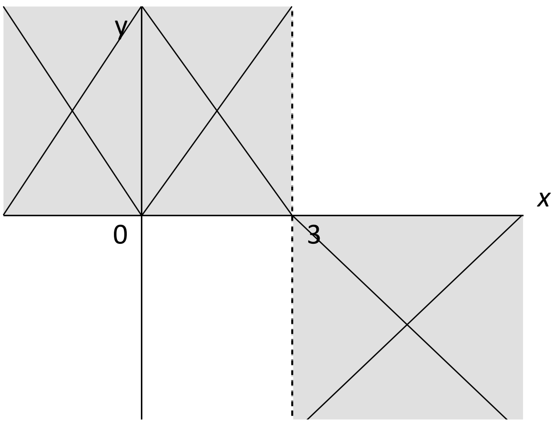
Esempio 2: $y = 2^x - 8$

$2^x - 8 > 0 \to \ 2^x > 8$

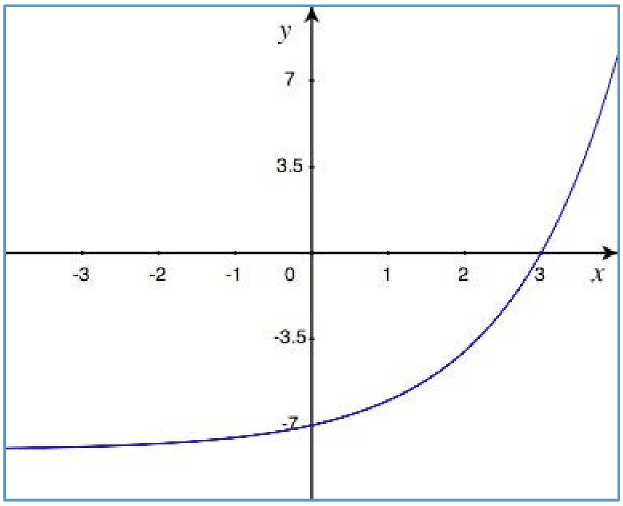
Ora poiché $2^x = 8 \to x = 3$ e , poiché al crescere di x , 2^x cresce (ciò che accade sempre quando la base è maggiore di 1) sarà $2^x > 8$ quando $x > 3$.

In conclusione si ha che la funzione : è positiva per $x > 3$, negativa per $x < 3$ ed uguale a 0 per $x = 3$.

Riportiamo tali esiti sul piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



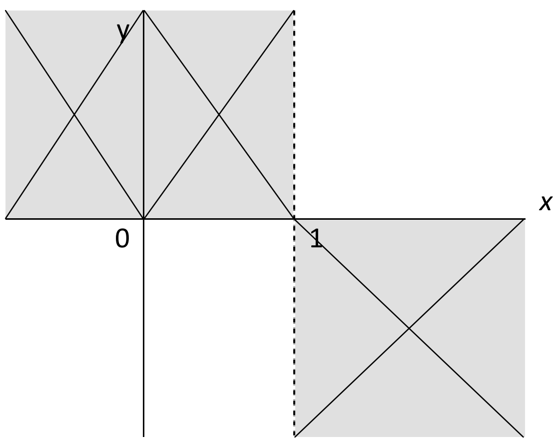
La funzione passa tra il punto $(3\,;0)$

Esempio 3: $\boldsymbol{y = (x-1)e^{5x}}$

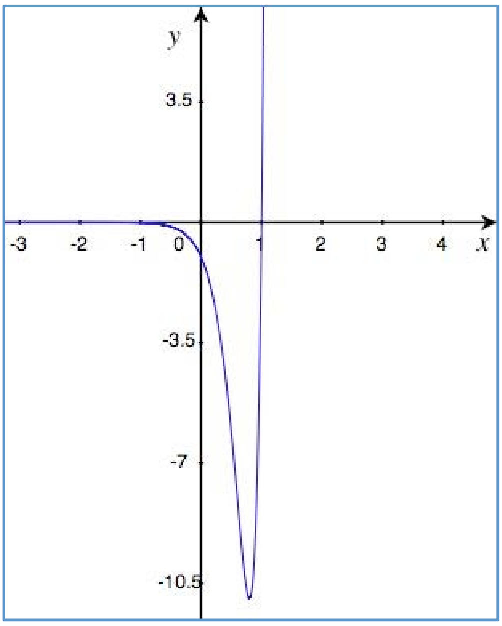
e è il numero di Nefero ($e = 2{,}718 \ldots$, numero irrazionale).
Siccome la funzione è il prodotto delle due funzione $x-1$ e di e^{5x} e fare il grafico dei segni.
1° $\quad x - 1 \geq 0 \quad x \geq 1$
2° $\quad e^{5x} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ (come già osservato precedentemente)
Pertanto si ha:

1°	1	
2°		
	-	+

Riportiamo i risultati sul piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



La funzione passa per il punto $P \equiv (1; 0)$.

Esempio 4: $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 9}$

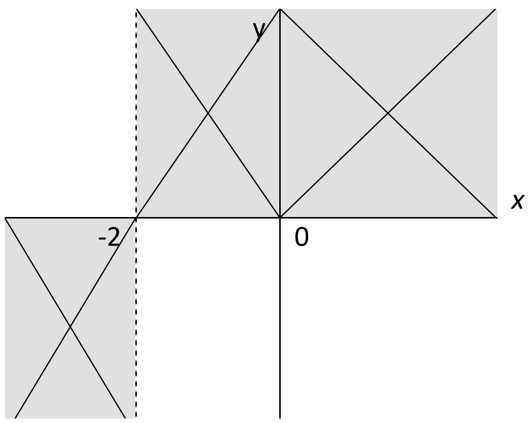
Ricordiamo che quando a è un numero maggiore di 0 e minore di 1, allora a^x diventa sempre più piccolo all'aumentare di x. Pertanto, poiché

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 = 0 \;\rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \;\rightarrow\; \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^2 \;\rightarrow\; x = -2$$

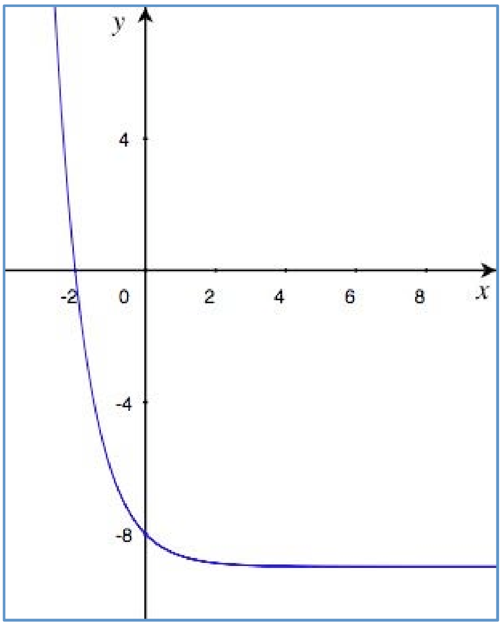
Si avrà

$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 > 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \quad \text{quando} \quad x < -2$

Riportando ciò nel piano cartesiano:



Il grafico della funzione è



FUNZIONI GONIOMETRICHE

Ricordiamo che :

1) la funzione $y = \sin x$ è periodica con periodo uguale a 2π e che è positiva per $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ e negativa per $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ (positiva nel semipiano delle ordinate positive e negativa in quello delle ordinate negative).
2) la funzione $y = \cos x$ è periodica con periodo uguale a 2π ed è positiva per $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mentre è negativa per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ (positiva nel 1° e 4° quadrante e negativa nel 2° e 3°).
3) La funzione $y = tg\, x$ è periodica con periodo uguale a π ed è positiva per $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ e negativa per $(2k+1)\frac{\pi}{2} < x < (k+1)\pi$ (positiva nel 1° e 3° quadrante e negativa nel 2° e 3°).
4) La funzione $y = co\,tg\, x$ è la funzione reciproca di $tg\, x$ ($cotg\, x = \frac{1}{tgx}$), quindi ha lo stesso segno di $tg\, x$.

Esempio 1 $\quad y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$

Per quanto detto poco fa, $\sin(2x + \frac{\pi}{2})$ è positiva se $2k\pi < 2x + \frac{\pi}{2} < (2k+1)\pi$

Per individuare i valori delle x in corrispondenza dei quali la funzione è positiva bisogna risolvere le due disequazioni:

$2k\pi < 2x + \frac{\pi}{2}$ e $\qquad 2x + \frac{\pi}{2} < (2k+1)\pi$

Dalla prima si ha:

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x \rightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < x \rightarrow (4k-1)\frac{\pi}{4} < x$$

Dalla seconda si ha:

$$2x < 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x < k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x < (4k+1)\frac{\pi}{4}$$

Pertanto $sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ risulta positiva quando

$$(4k-1)\frac{\pi}{4} < x < (4k+1)\frac{\pi}{4}$$

ed è, invece, negativa se

$$(2k-1)\pi < 2x + \frac{\pi}{2} < 2k\pi$$

Risolvendo la disequazione

$$(2k-1)\pi < 2x + \frac{\pi}{2}$$

si ottiene

$2k\pi - \pi - \frac{\pi}{2} < 2x \rightarrow 2k\pi - \frac{3}{2}\pi < 2x \rightarrow k\pi - \frac{3}{4}\pi < x \rightarrow (4k-3)\frac{\pi}{4} < x$

e risolvendo la

$$2x + \frac{\pi}{2} < 2k\pi$$

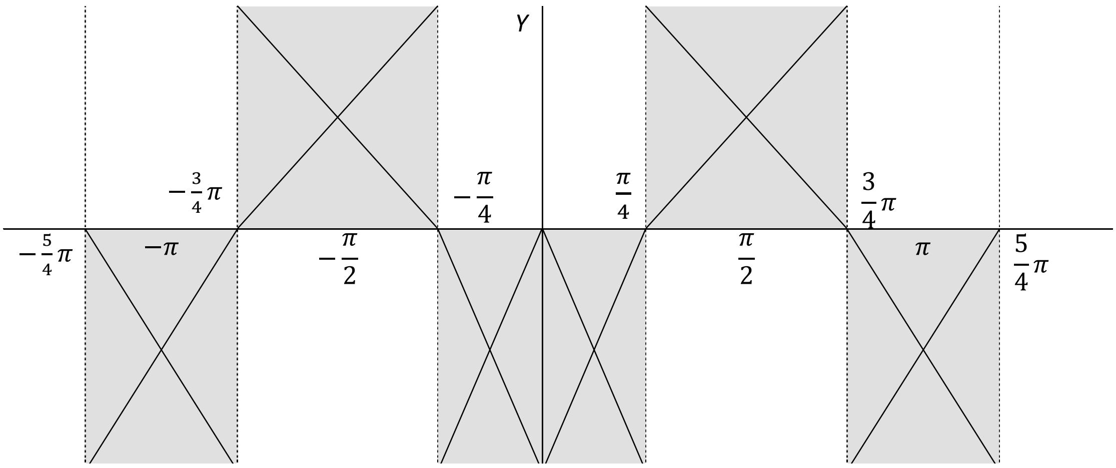
si ha

$$2x < 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x < k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x < (4k-1)\frac{\pi}{4}$$

Pertanto il segno negativo si ha quando

$(4k-3)\frac{\pi}{4} < x < \ (4k-1)\frac{\pi}{4}$

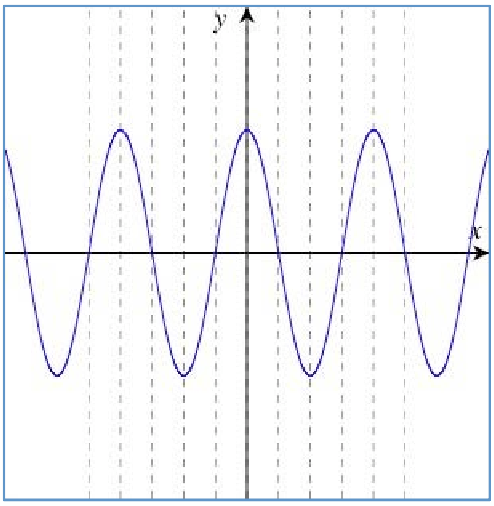
Segue il grafico del segno:



La funzione si annulla nei punti

$x = \ (2k+1)\frac{\pi}{4}$ con $k \in \ \mathbb{Z}$

Il grafico della funzione è



Esempio 2 $y = \cos(-x + \frac{\pi}{6})$

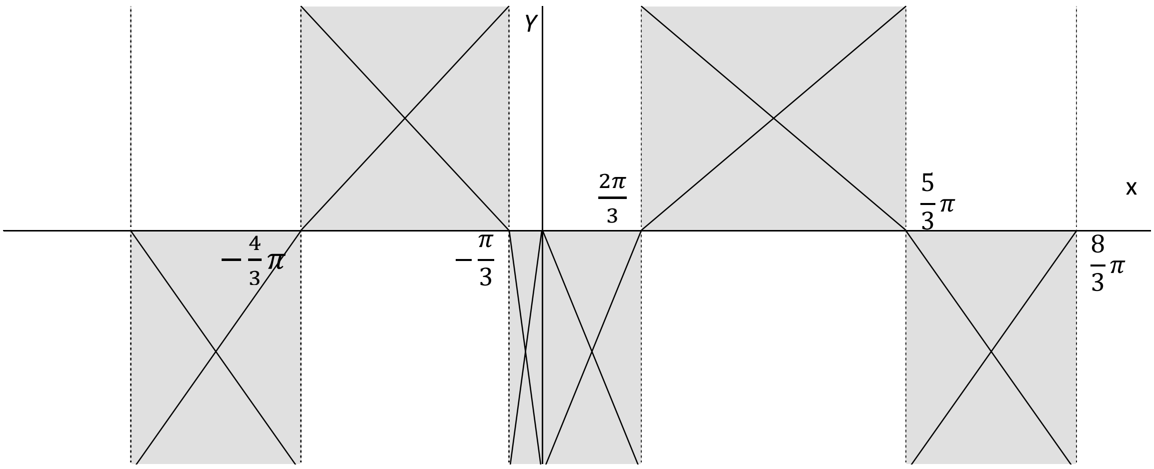
Per quanto detto in precedenza, $\cos(x)$ è positiva quando $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < -x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Da $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < -x + \frac{\pi}{6}$ si ricava $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < -x \ \rightarrow\ -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < -x \ \rightarrow\ \frac{2}{3}\pi - 2k\pi > x$

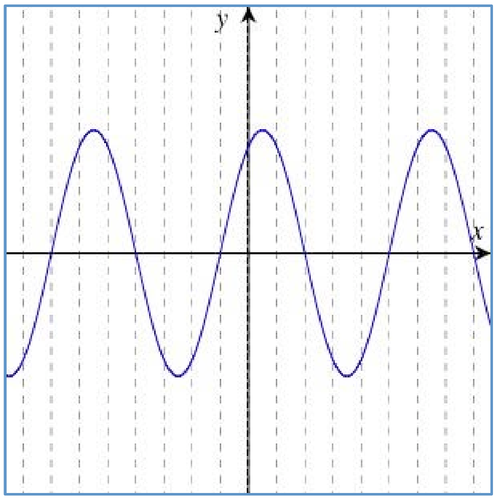
Da $-x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ si ha $-x < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \rightarrow\ -x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \rightarrow x > -\frac{\pi}{3} - 2k\pi$

Dunque $\cos(-x + \frac{\pi}{6})$ è positiva per
$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Il grafico del segno è il seguente



Il grafico della funzione è



Esempio 3 $\boldsymbol{y = tg(3x)}$

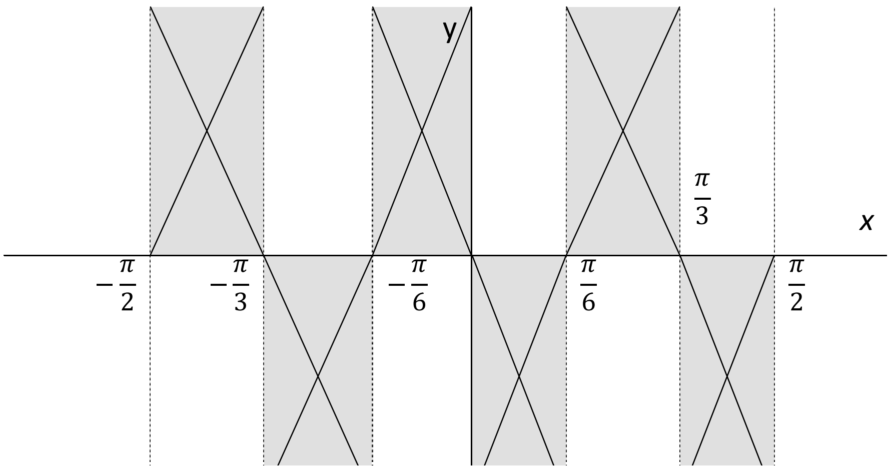
$tg(3x)$ è positiva quando per $k\pi < 3x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Quindi $k\pi < 3x \rightarrow \frac{k\pi}{3} < x$ e $3x < \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x < \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

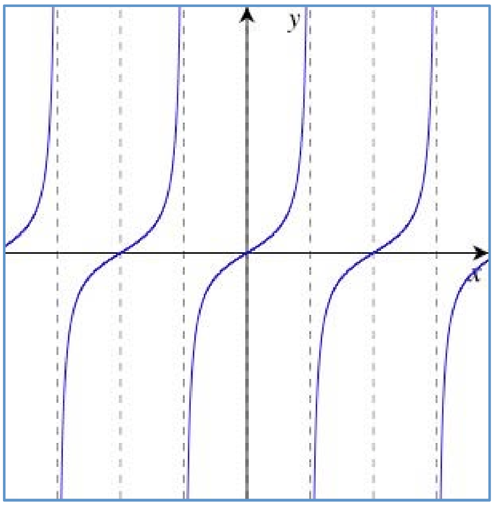
Pertanto $tg(3x)$ è positiva quando

$$k\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{26} + k\frac{\pi}{3}$$

Il grafico dei segni è il seguente



Il grafico della funzione è



La funzione si annulla nei punti $x = k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.