PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

Un punto x_0 di un intervallo $[a; b]$ si dice **punto di discontinuità** per una funzione $f(x)$ se la funzione non è continua in x_0.

Punti di discontinuità di prima specie

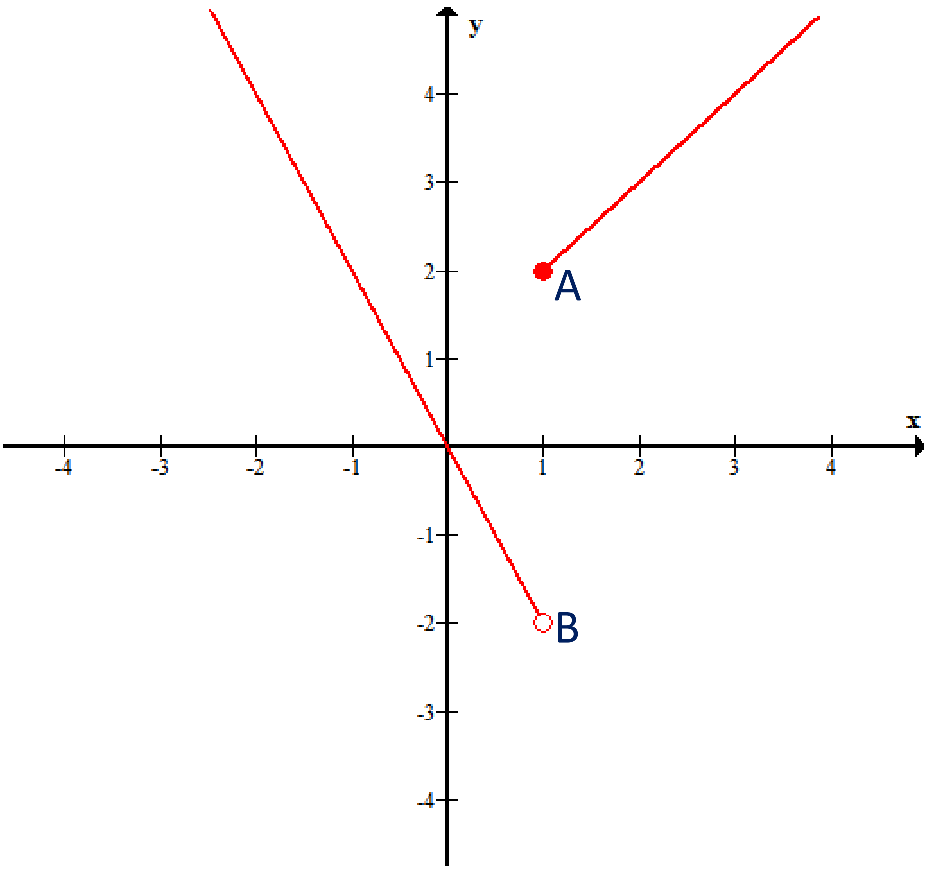
Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di prima specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$,il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ sono entrambi finiti ma diversi fra loro.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

La differenza $|l_2 - l_1|$ si dice **salto** della funzione.

Esempio n.1

$$f(x) = \begin{cases} -2x \; se \; x < 1 \\ x + 1 \; se \; x \geq 1 \end{cases}$$

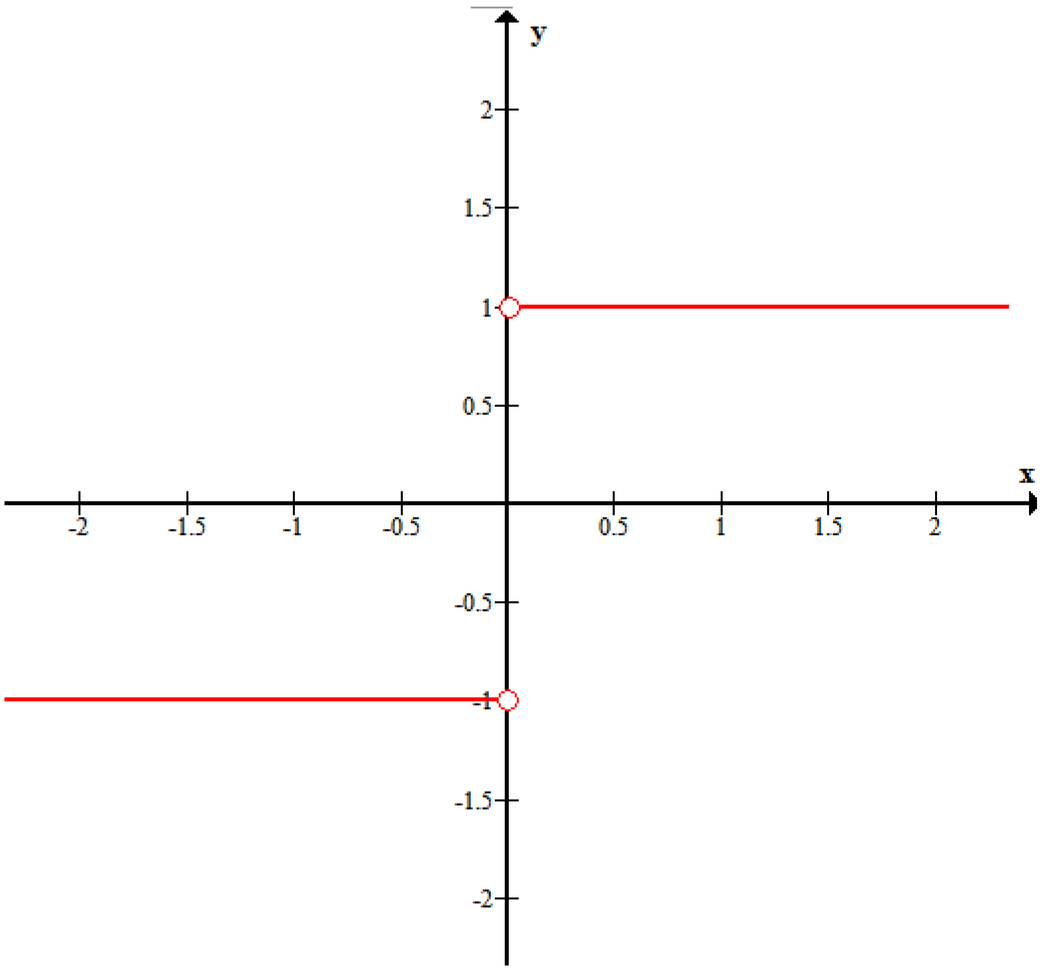


$$\lim_{x \to 1^-} (-2x) = -2 \qquad e \qquad \lim_{x \to 1^+} (x + 1) = 2$$

Nel punto $x_0 = 1$ la funzione ha una discontinuità di prima specie. Il salto della funzione nel punto vale: $|2 - (-2)| = 4$

Esempio n.2

$f(x) = \frac{x}{|x|}$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad e \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

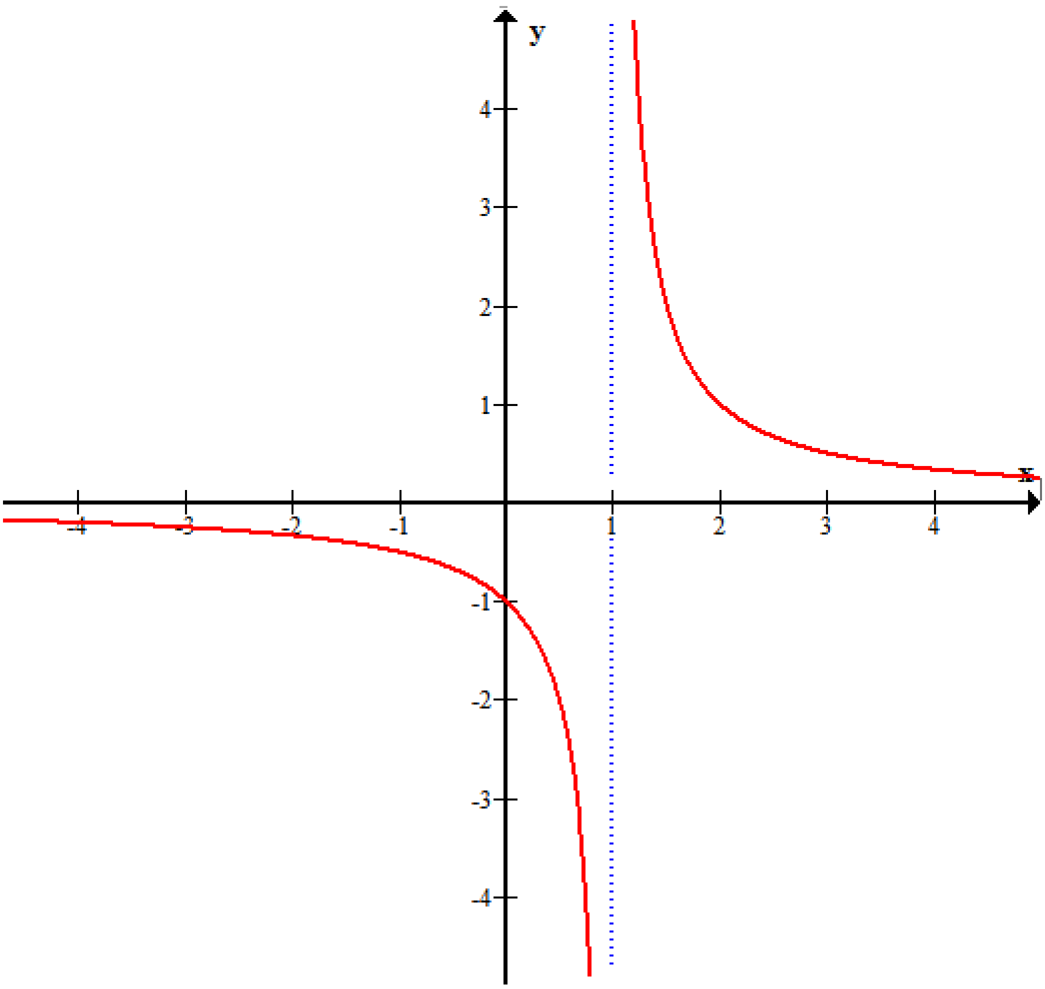
Nel punto $x_0 = 0$ la funzione ha una discontinuità di prima specie. Il salto della funzione nel punto vale: $|1 - (-1)| = 2$

Punti di discontinuità di seconda specie

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito o non esiste.

Esempio n.1

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

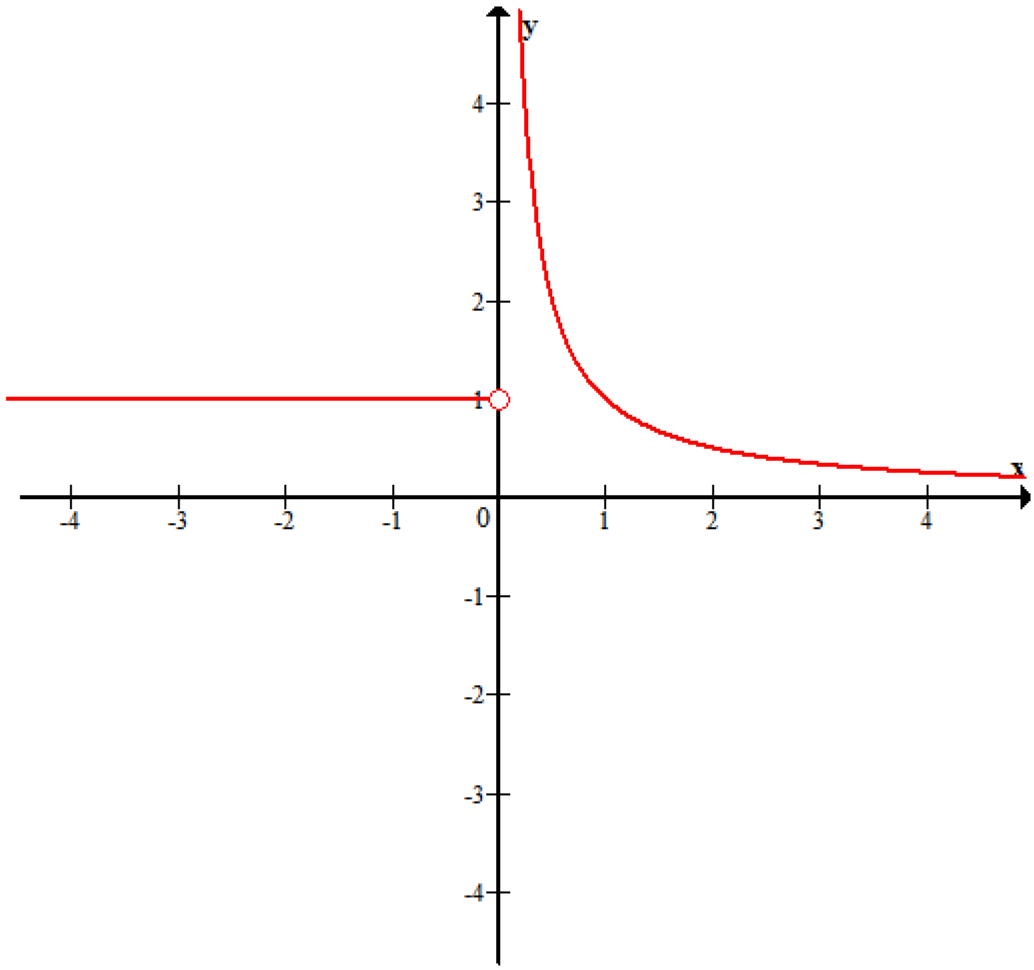


La funzione nel punto $x_0 = 1$ ha una discontinuità di seconda specie, perchè risulta:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Esempio n.2

$$f(x) = \begin{cases} +1 & se\ x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & se\ x < 0 \end{cases}$$

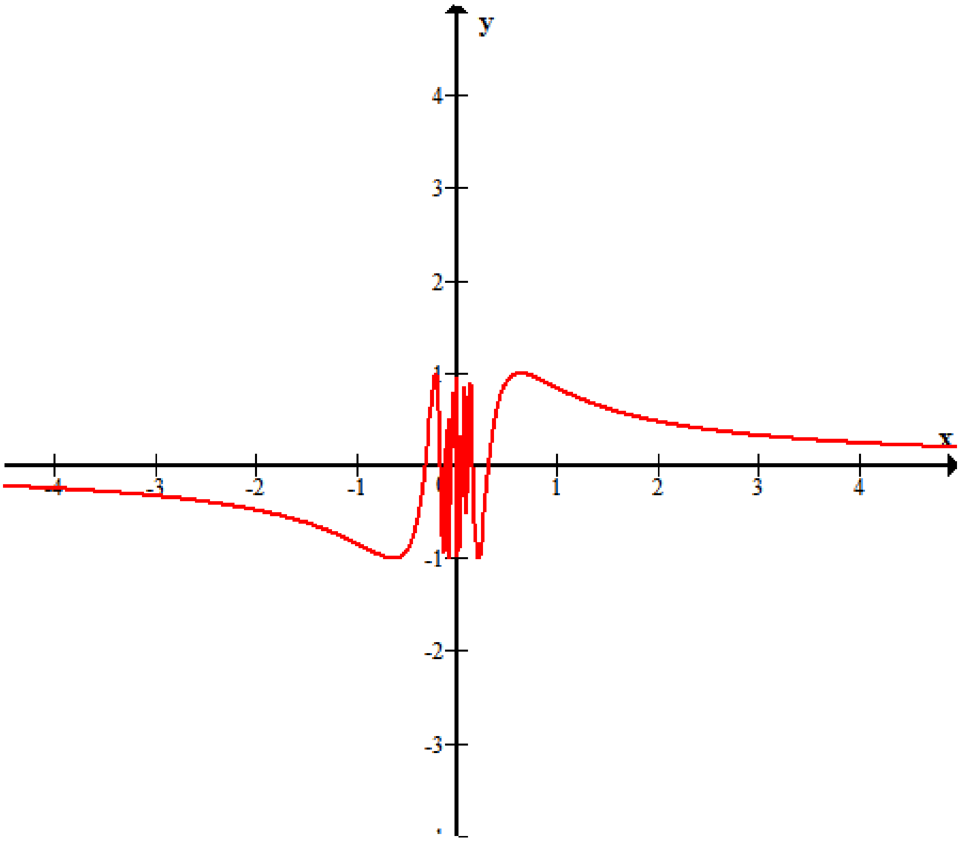


La funzione nel punto $x_0 = 0$ ha una discontinuità di seconda specie, perchè risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Esempio n.3

$f(x) = sen\frac{1}{x}$



La funzione in qualunque intorno sia destro che sinistro del punto $x_0 = 0$ oscilla infinite volte tra -1 e1.

La funzione non ammette né limite destro né limite sinistro, perciò presenta nel punto una discontinuità di seconda specie.

Punti di discontinuità di terza specie (o eliminabile)

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di terza specie per la funzione $f(x)$ quando:

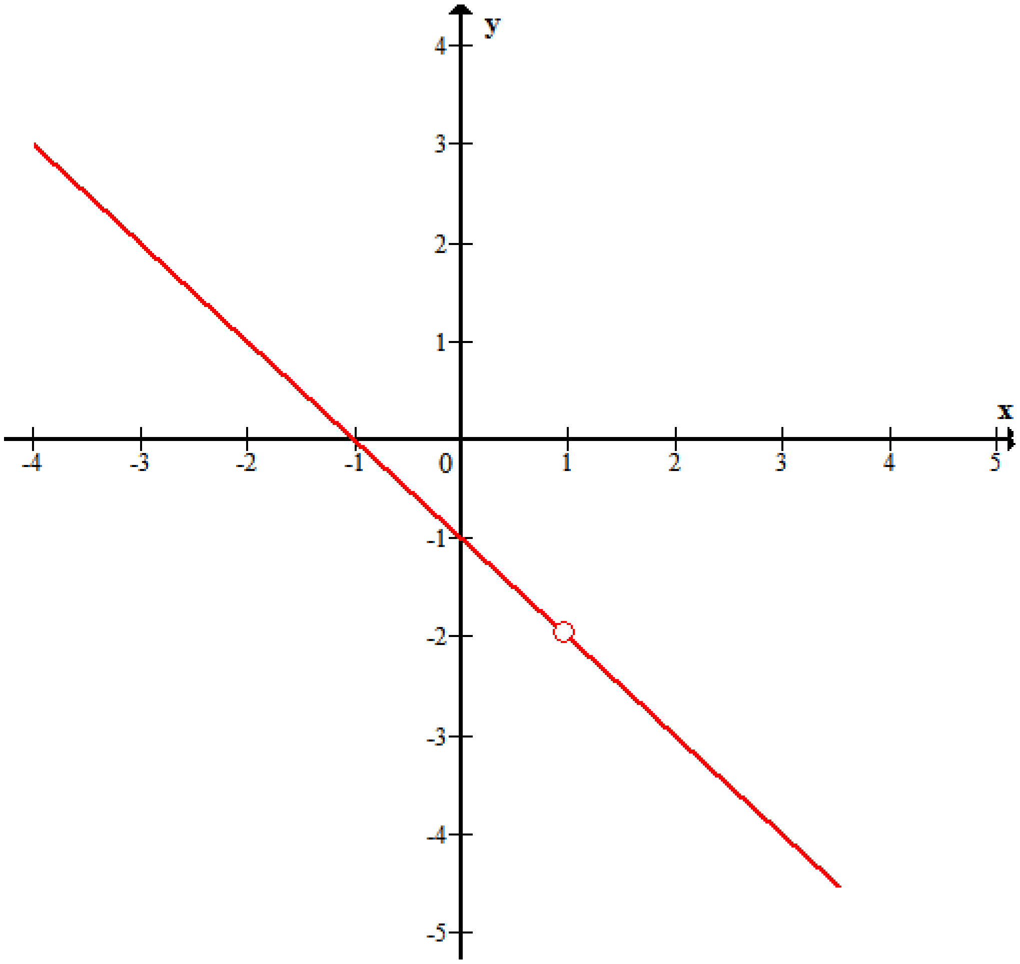
1. esiste ed è finito il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, ossia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l;$$

2. la funzione non è definita in $x_{0,}$ oppure, se lo è, risulta $f(x_0) \neq l$.

Esempio n.1

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$$



La funzione è discontinua in $x_0 = 1$ perché $f(1)$ non esiste.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)} = -2$$

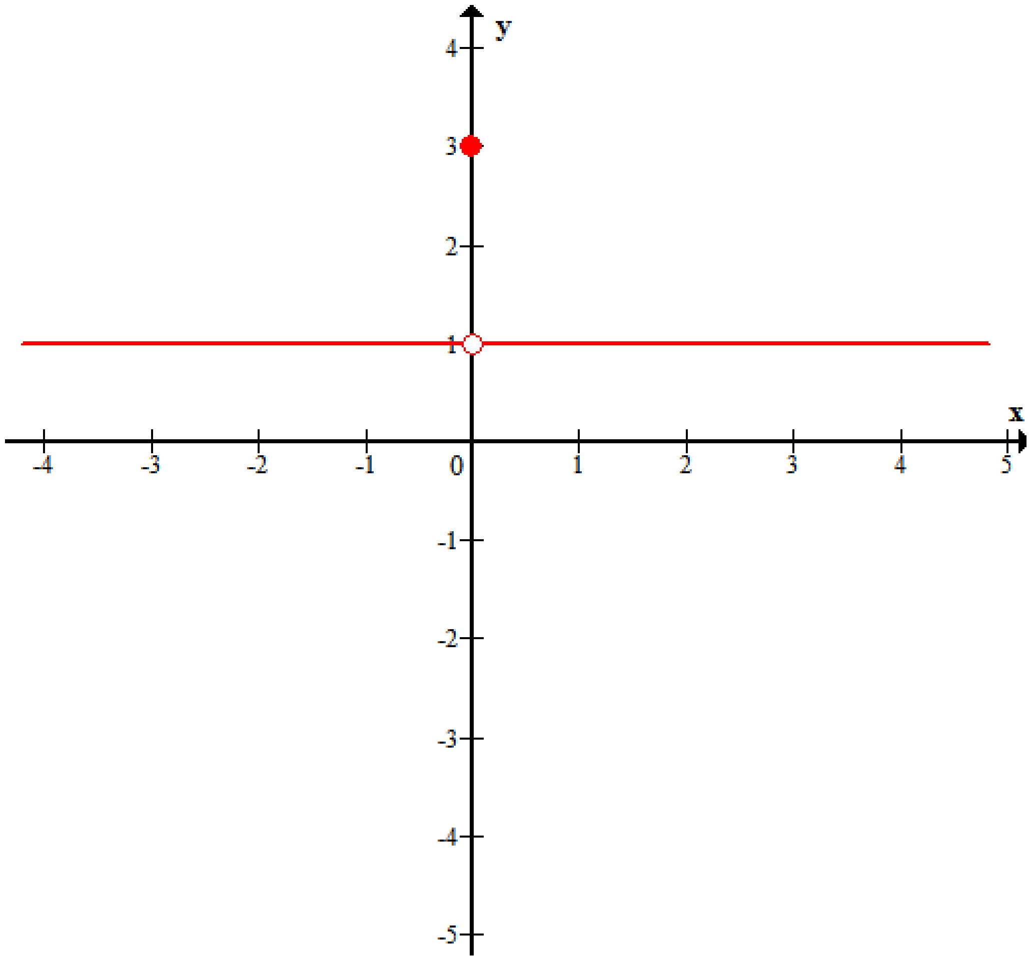
La discontinuità è di terza specie; la discontinuità è solo *apparente*. Il salto tra i due limiti sinistro e destro è nullo.

La discontinuità si può eliminare definendo la funzione anche nel punto $x_0 = 1$ ponendo $f(1) = -2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ -2 & se\ x = 1 \end{cases}$$

Esempio n.2

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \neq 0 \\ 3 \; se \; x = 0 \end{cases}$$



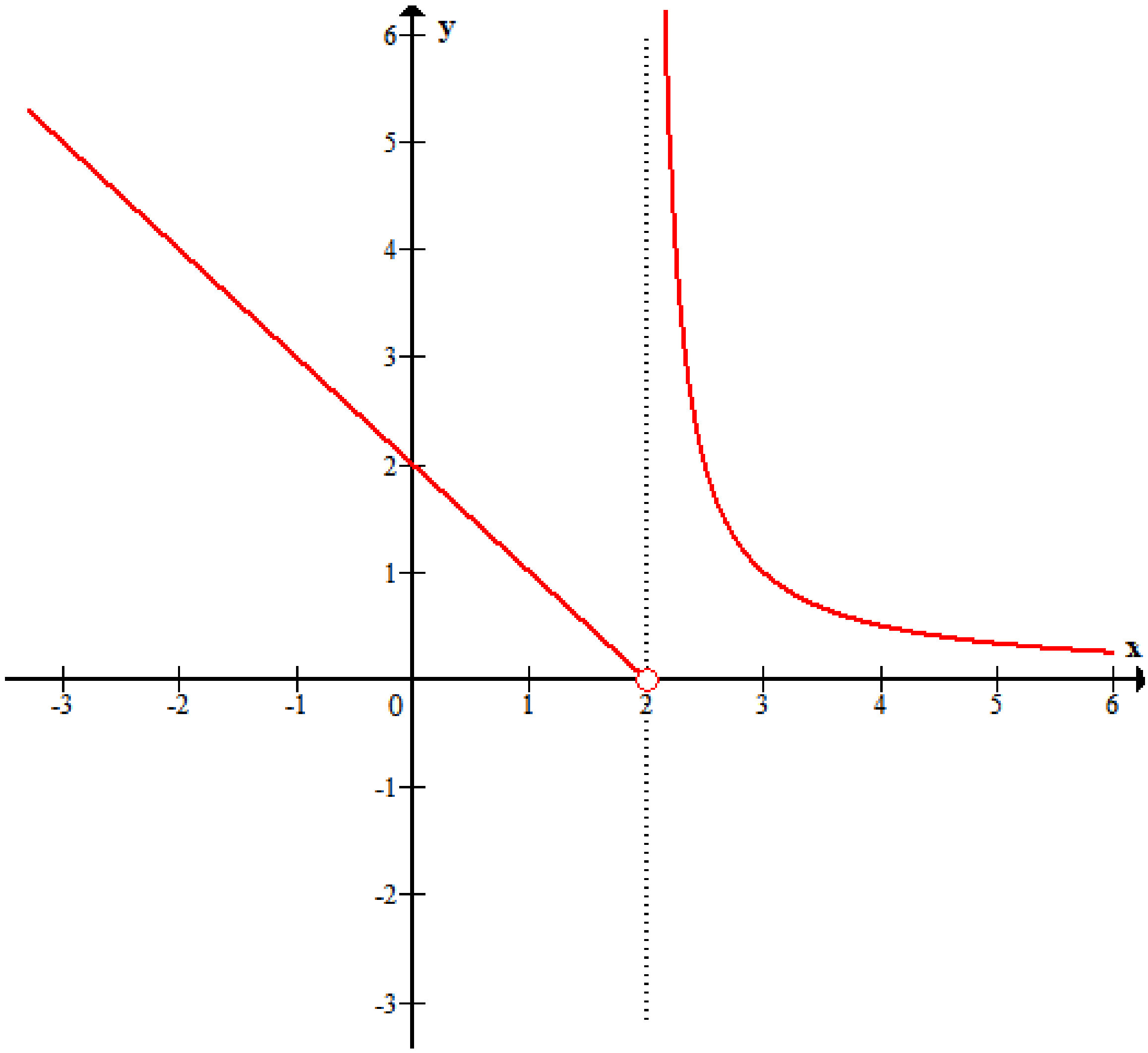
Nel punto $x_0 = 0$ la funzione presenta una discontinuità di terza specie in quanto è definita, essendo $f(0) = 3$, ma risulta:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

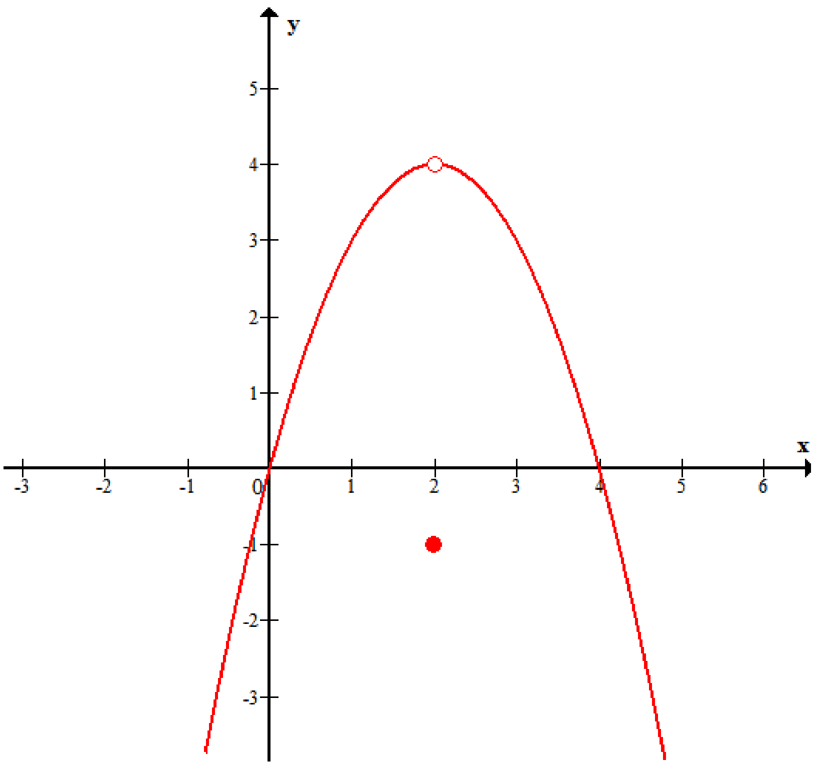
ESERCIZI

1. Dall'analisi dei seguenti grafici individua e classifica gli eventuali punti di discontinuità:

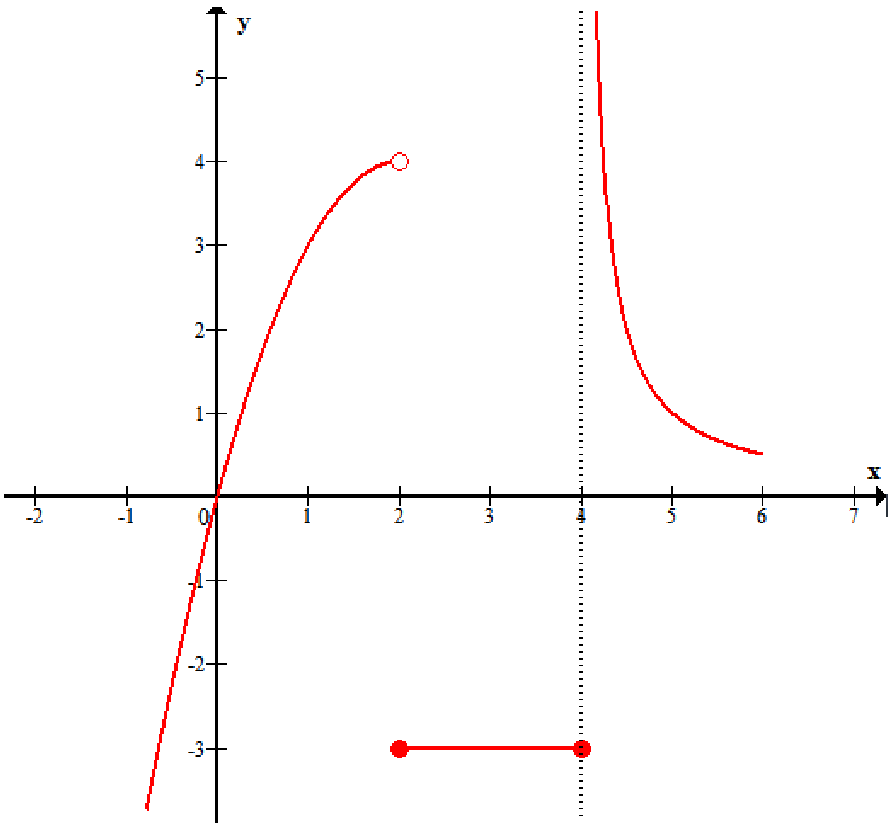
   a.



b.



c.



2. Determina, fra quelli a fianco assegnati, quali sono i punti di discontinuità per le relative funzioni e caratterizzane la specie:

   a. $y = \frac{1}{x-3}$ $\quad x = 1 \quad e \quad x = 3$

   b. $y = \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ $\quad x = 2$

   c. $y = \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ $\quad x = -2 \quad e \quad x = 2$

   d. $y = \sqrt{x+4}$ $\quad x = -2$

   e. $y = \frac{1}{|x|}$ $\quad x = 0$

3. Quesito n.1
   Dai la definizione di funzione continua in un punto x_0.
   Verifica, inoltre, se la funzione $y = \frac{1}{x+1}$ è continua nel punto $x_0 = -1$ e, se non lo è, determina il tipo di discontinuità.

4. Quesito n.2
   Definisci i vari tipi di discontinuità di una funzione in un punto x_0 e fai, di ogni tipo, un esempio.