Esercizi di fondamenti di matematica

1. Dato un rombo con un angolo di $60°$ trovare il rapporto tra il raggio del cerchio inscritto nel rombo e il raggio del piu' piccolo cerchio che contiene interamente il rombo.

Soluzione: Il cerchio piu' piccolo che contiene interamente il rombo e' quello che ha come diametro D la diagonale maggiore del rombo: tutti i cerchi piu' piccoli non possono contenere il rombo, perche' i due vertici dei due angoli di $60°$ sono appunto a distanza D e la distanza massima tra due punti che appartengono a un cerchio e' pari al suo diametro, dunque qualunque cerchio con un diametro minore di D non puo' contenere il rombo. Detto ora l il lato del rombo, poiche' esso e' costituito da due triangoli equilateri, la lunghezza della sua diagonale D e' pari a $\sqrt{3}l$. Il diametro del cerchio inscritto d e' pari alla distanza dei lati del rombo, e dunque all'altezza di uno dei due triangoli equilateri che costituiscono il rombo. La lughezza di d e' dunque pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}l$. Il rapporto tra i due diametri, che e' ovviamente uguale al rapporto tra i due raggi, e' dunque $\frac{d}{D} = \frac{1}{2}$.

2. Mostrare che perche' un quadrilatero sia inscrivibile in un cerchio la somma degli angoli opposti deve essere di $180°$.

Soluzione: I due angoli opposti in un quadrilatero inscritto in un cerchio sono due angoli alla circonferenza di due archi che sommati danno l'intera circonferenza. Dunque la somma dei due angoli al centro e' $360°$. La somma dei due angoli alla circonferenza e' la meta', ed e' dunque pari a $180°$. Quindi se un quadrilatero e' inscritto in una circonferenza deve avere la somma degli angoli opposti pari a $180°$.

3. E' dato un trapezio isoscele con l'angolo alla base di $60°$, la base minore di lunghezza l e la base maggiore di lunghezza $2l$. Trovare il rapporto tra il raggio del cerchio circoscritto al trapezio e il raggio del piu' grande cerchio interamente contenuto nel trapezio.

Soluzione: Collegando i due vertici adiacenti alla base minore con il punto medio della base maggiore O si ottiene un triangolo che ha come base la base minore del trapezio, e come vertice il punto O. I lati di questo triangolo sono paralleli ai lati obliqui del trapezio, e sono uguali tra di loro. Dunque il triangolo e' isoscele e ha gli angoli alla base di $60°$, e dunque e' equilatero. Questo significa che tutti e quattro i vertici del trapezio sono a distanza l dal punto O, che e' dunque il centro della circonferenza circoscritta. La base maggiore e' dunque pari al diametro del cerchio circoscritto. Detto R il raggio del cerchio circoscritto si ha dunque $R = l$. Il piu' grande cerchio interamente contenuto nel trapezio e' quello che ha come diametro d la distanza tra le basi, cioe' l'altezza del trapezio: infatti qualunque cerchio con un diametro maggiore di d contiene due punti che appartengono a una retta perpendicolare alle basi del trapezio e che sono a distanza maggiore di d, e dunque non possono essere entrambi contenuti nel trapezio. Poiche' quest'ultimo e' costituito da triangoli equilateri la sua altezza e' pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}l$. Il raggio r del cerchio contenuto nel trapezio e' dunque $r = \frac{\sqrt{3}}{4}l$. Il rapporto richiesto e' dunque $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

4. Mostrare che il rettangolo di perimetro $4n$ che ha l'area maggiore e' il quadrato di lato n.

Soluzione: Se il perimetro del rettangolo e' $P = 4n$, i suoi due lati hanno lunghezza $n - a$ e $n + a$, dove a e' un qualunque numero $0 \leq a < n$. L'area A del rettangolo e' dunque $A = (n + a)(n - a) = n^2 - a^2$. Dunque piu' a e' grande piu' l'area e' piccola. L'area maggiore si ottiene per $a = 0$, che corrisponde al caso del quadrato.

5. Mostrare la formula seguente: $r = 2A/p$, dove A e' l'area di un triangolo, p e' il suo perimetro e r e' il raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

Soluzione: Dato il triangolo ABC e il suo cerchio inscritto di raggio r e centro O, si considerino i tre triangoli AOB, AOC e BOC. I tre triangoli hanno come base i tre lati AB, BC e CA e come altezza r, perche' il raggio da O a ciascuno dei tre lati e' perpendicolare al lato, essendo la circonferenza tangente a quel lato. Dunque si ha, indicando con $A(PQR)$ l'area del triangolo PQR:

$$A = A(ABC) = A(AOB) + A(AOC) + A(BOC) =$$

$$= \frac{AB \times r}{2} + \frac{AC \times r}{2} + \frac{BC \times r}{2} = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}rp$$

che e' la formula richiesta.

6. Utilizzando il risultato 5 trovare il rapporto tra il cerchio inscritto e il cerchio circoscritto a un triangolo isoscele con l'angolo alla base di $30°$

Soluzione: Dividendo in due il triangolo dato tramite l'altezza si ottengono due triangoli rettangoli uguali con gli angoli di $30°$ e $60°$. Detto l il lato adiacente al vertice, la base ha dunque lunghezza $\sqrt{3}l$. Considerando ora il rombo ottenuto unendo il triangolo dato con un altro triangolo uguale che ha la base in comune ma il vertice nel semipiano opposto, si ha che il rombo e' costituito da due triangoli equilateri. Dunque i tre vertici del triangolo dato sono tutti e tre a distanza l dal vertice O del nuovo triangolo, e quindi O e' il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Quindi il raggio R del cerchio circoscritto e' pari $R = l$. Inoltre l'altezza del triangolo e' pari a $\frac{l}{2}$. Il raggio del cerchio inscritto si ottiene dalla formula dimostrata nell'esercizio 5: poiche' il perimetro del triangolo e' $p = (2+\sqrt{3})l$ e l'area e' $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, si ha $r = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}l$ e dunque $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}$

7. Utilizzando il risultato 5 trovare il rapporto tra il cerchio inscritto e il cerchio circoscritto a un triangolo rettangolo con un angolo di $30°$

Soluzione: Detta l l'ipotenusa del triangolo si ha che il raggio R del cerchio circoscritto e' pari a $R = \frac{l}{2}$, perche' l'ipotenusa di un triangolo rettangolo coincide con il diametro del cerchio circoscritto. Il raggio del cerchio inscritto si ottiene dalla formula dimostrata nell'esercizio 5: poiche' i lati del triangolo misurano l, $\frac{l}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}l$, si ha per il perimetro

$p = \frac{3+\sqrt{3}}{2}l$ e per l'area $A = \frac{\sqrt{3}}{8}l^2$ e dunque $r = \frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})}l$. Il rapporto richiesto e' dunque $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

8. Utilizzando il risultato 5 trovare il rapporto tra il cerchio inscritto e il cerchio circoscritto a un triangolo rettangolo con un angolo di 45°

Soluzione: Detta l l'ipotenusa del triangolo si ha che il raggio R del cerchio circoscritto e' pari a $R = \frac{l}{2}$, perche' l'ipotenusa di un triangolo rettangolo coincide con il diametro del cerchio circoscritto. Il raggio del cerchio inscritto si ottiene dalla formula dimostrata nell'esercizio 5: i lati del triangolo misurano l, $\frac{l}{\sqrt{2}}$, $\frac{l}{\sqrt{2}}$, e dunque si ha per il perimetro $p = (1 + \frac{2}{\sqrt{2}})l = (1 + \sqrt{2})l$ e per l'area $A = \frac{l^2}{4}$. Si ottiene quindi $r = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}l$ e $\frac{r}{R} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Per dare una stima per eccesso (risp. per difetto) del numero π si puo' utilizzare il confronto con l'area di un poligono circoscritto (risp. inscritto) a un cerchio di raggio 1, oppure si puo' utilizzare il confronto con il suo perimetro.

9. Dare una stima per difetto del valore di π utilizzando il perimetro del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio 1.

Soluzione: Il lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio 1 e' evidentemente 1, quello del quadrato e' $\sqrt{2}$, quello del triangolo equilatero e' $\sqrt{3}$, perche' e' la distanza tra i due lati opposti dell'esagono regolare (il triangolo equilatero inscritto si ottiene congiungendo tre vertici dell'esagono). Il perimetro del triangolo equilatero inscritto e' dunque $3\sqrt{3} = 5.19$, quello del quadrato e' $4\sqrt{2} = 5.64$, quello dell'esagono e' 6. Le corrispondenti stime di π sono, rispettivamente, $\pi > 2.59$, $\pi > 2.82$, $\pi > 3$.

10. Dare una stima per eccesso del valore di π utilizzando l'area del triangolo equilatero, del quadrato e dell'esagono regolare circoscritto al cerchio di raggio 1.

Soluzione: Il lato del triangolo equilatero circoscritto e' il doppio di quello del triangolo equilatero inscritto, come si vede tracciando le tangenti ai punti di contatto tra la circonferenza e i vertici del triangolo inscritto. Dunque il lato del triangolo equilatero circoscritto e' $2\sqrt{3}$. Il lato del quadrato circoscritto e' evidentemente 2. Il lato dell'esagono circoscritto e' pari a $\frac{2}{\sqrt{3}}$, perche' il rapporto tra lato e apotema di un esagono regolare e' $\frac{2}{\sqrt{3}}$, e in questo caso l'apotema e' proprio il raggio del cerchio inscritto. Dunque si ha che l'area del triangolo, che e' pari al quadrato del lato per $\frac{\sqrt{3}}{4}$, e' pari a $3\sqrt{3}$; l'area del quadrato e' pari a 4; l'area dell'esagono e' pari a $2\sqrt{3}$. Le corrispondenti stime di π sono, rispettivamente, $\pi < 5.18$, $\pi < 4$, $\pi < 3.47$.

11. Oslo ha una latitudine di 60° Nord. Quanto e' lungo il parallelo che passa per Oslo, sapendo che l'equatore e' lungo 40000 Km? Qual'e' la distanza tra Oslo e il polo Sud?

Soluzione: Il triangolo che collega Oslo, il centro della Terra e l'intersezione tra il meridiano di Oslo e l'equatore e' un triangolo equilatero perche' ha due lati uguali e un angolo di $60°$. Questo significa che la distanza tra Oslo e l'asse terrestre e' la meta' del raggio terrestre, e quindi il parallelo che passa per Oslo e' lungo la meta' dell'equatore, e cioe' 20000 Km. La distanza tra i due poli lungo un meridiano e' di 20000 Km. L'angolo tra Oslo e il polo Nord e' di $30°$, cioe' di $\frac{1}{6}$ dell'angolo piatto. Quindi la distanza tra Oslo e il polo Sud e' di $\frac{20000\times 5}{6} = 16666\ Km$.

12. Un contadino ha un appezzamento di terreno delimitato su di un lato da un muretto di pietra. Vuole costruire un recinto rettangolare per le sue pecore, utilizzando per uno dei lati del rettangolo il muro a secco, e per gli altri della rete metallica. Dispone in tutto di 40 m di rete, e decide di costruire un recinto $20m \times 10m$. Mostrare che tutti gli altri possibili recinti hanno area minore.

Soluzione: Un recinto diverso, dovendo essere comunque delimitato su tre lati dalla rete metallica che e' lunga $40m$, deve avere i due lati perpendicolari al muretto pari a $10 - a$ e quello parallelo al muretto pari a $20 + 2a$, con $-10 < a < 10$. L'area del recinto e' dunque $(10 - a) \times (20 + 2a) = 200 - 2a^2$ ed e' dunque sempre minore di $200m^2$ se a e' diversa da zero.

13. Le aquile hanno bisogno di molto spazio: se in un punto c'e' un nido di una coppia di aquile, nessuna aquila nidifica a meno di $20Km$ da quel punto. Quanti nidi d'aquila possono entrare in un'area circolare di diametro pari a $50Km$?

Soluzione: Sistemando un nido al centro della circonferenza, il problema e' calcolare quanti nidi si possono mettere sulla circonferenza garantendo una distanza superiore a $20Km$. Chiaramente sei nidi entrano: il lato dell'esagono regolare e' uguale al raggio della circonferenza circoscritta, ed e' dunque $25Km$. Sette nidi anche entrano: invece di calcolare il lato dell'ettagono, che e' un calcolo complicato, basta notare che il perimetro dell'ettagono sara' maggiore di quello dell'esagono, che e' $150Km$. siccome $150/7 > 20$, il lato dell'ettagono regolare sara' maggiore di $20Km$. Invece non e' possibile mettere otto nidi sulla circonferenza: La lunghezza della circonferenza e' 50π, dunque circa $157Km$, e dunque il perimetro dell'ottagono e' minore di $157Km$, dando un lato minore di $20Km$. In tutto, dunque, entrano nell'area indicata otto nidi.

14. Mostrare geometricamente che n^2 e' la somma dei primi n numeri dispari.

Soluzione: Per passare da un quadrato di lato l, composto dunque da l^2 quadratini unitari, a uno di lato $l + 1$, bisogna "orlare" i due lati con l quadratini, e aggiungere poi un quadratino nell'angolo. Dunque bisogna aggiungere $2l + 1$ quadratini. Per costruire il quadrato di lato n bisogna dunque aggiungere di volta in volta tutti i numeri della forma $2l + 1$, con l che va da zero a $n - 1$. Questi sono tutti i primi n numeri dispari. Prova:

$1^2 = 1$

$2^2 = 4 = 1 + 3$

$3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$

$4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$ etc.

15. Una terna pitagorica e' un insieme di tre numeri interi a, b, c tali che $a^2 + b^2 = c^2$. Trovare un argomento semplice per mostrare che per ogni $a \geq 3$ dispari esiste una terna pitagorica in cui $c = b + 1$

Soluzione: Dall'esercizio precedente, basta trovare una coppia di quadrati consecutivi la cui differenza sia un numero dispari che e' a sua volta un quadrato. Per esempio quando i due quadrati successivi la cui differenza e' 9 sono 4^2 e 5^2, e questo da' la terna 3,4,5. I due quadrati successivi la cui differenza e' 25 sono 12^2 e 13^2, e questo da' la terna 5,12,13. I due quadrati successivi la cui differenza e' 49 sono 24^2 e 25^2, e questo da' la terna 7,24,25, e cosi' via.