

# DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

- Una disequazione in cui l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di radice.

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

- Distinguiamo due casi:
- $n$  dispari
- $n$  pari

# $n$ dispari

- Il dominio della funzione radice con  $n$  dispari coincide con tutto  $\mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$$

$$A(x) > B^n(x)$$

# n pari

- Il dominio della funzione radice con n pari coincide con  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- Distinguiamo due casi:

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$$

- Le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^n(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$$

- Le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^n(x) \end{cases}$$

# ESEMPIO n dispari

$$\sqrt[3]{8x^3 + 5x^2} \leq 2x + 1$$

$$8x^3 + 5x^2 \leq 8x^3 + 1 + 6x + 12x^2$$

$$5x^2 \leq 1 + 6x + 12x^2$$

$$0 \leq 1 + 6x + 7x^2$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{2}}{7} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{2}}{7}$$

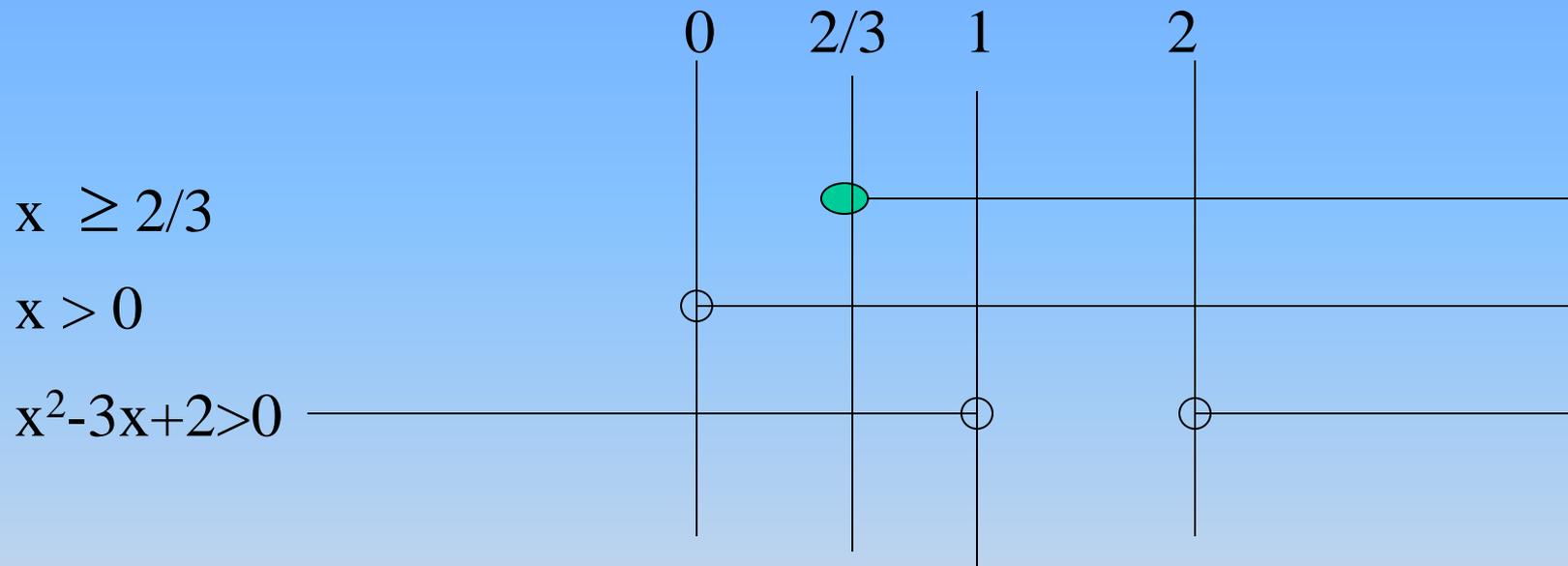
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{-3 - \sqrt{2}}{7} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{-3 + \sqrt{2}}{7} \right\}$$

# ESEMPIO n pari

$$\sqrt[2]{3x - 2} < x$$

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, & x \geq \frac{2}{3} \\ x > 0, \\ 3x - 2 < x^2, & x < 1 \cup x > 2 \end{cases}$$

# CONTINUA ESEMPIO



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} \leq x < 1 \right\} \cup \{ x \in \mathbb{R} : x > 2 \}$$

# ESEMPIO n PARI

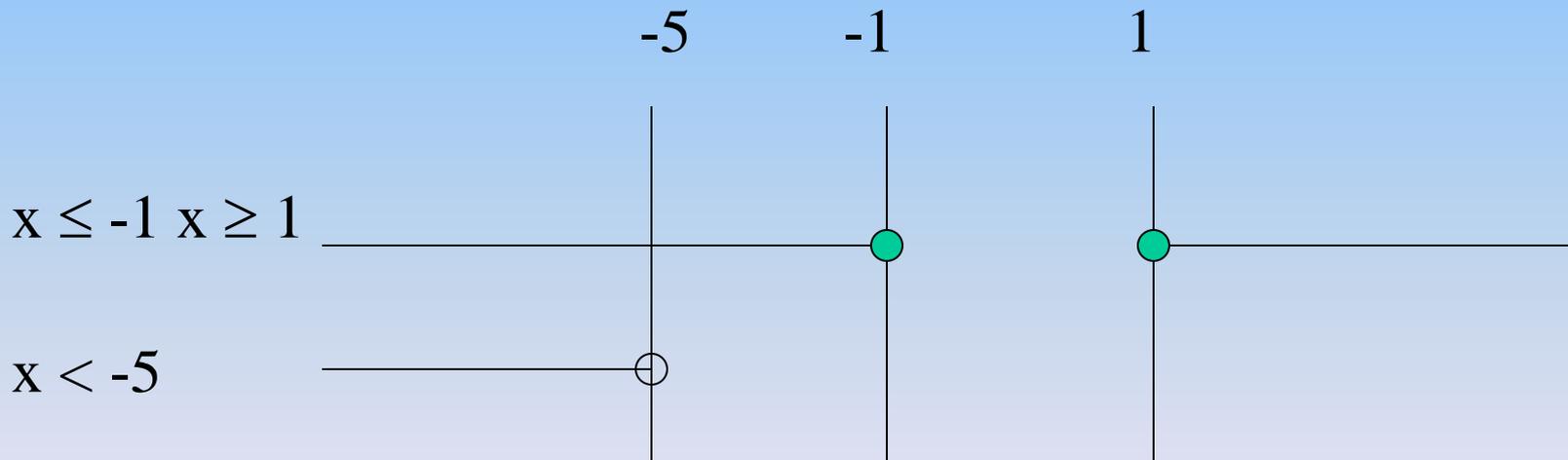
$$\sqrt{x^2 - 1} > x + 5$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 5 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 1 > (x + 5)^2 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

# CONTINUA ESEMPIO

- Risolviamo il primo sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 & \rightarrow & x \leq -1 \quad x \geq 1 \\ x + 5 < 0 & \rightarrow & x < -5 \end{cases}$$

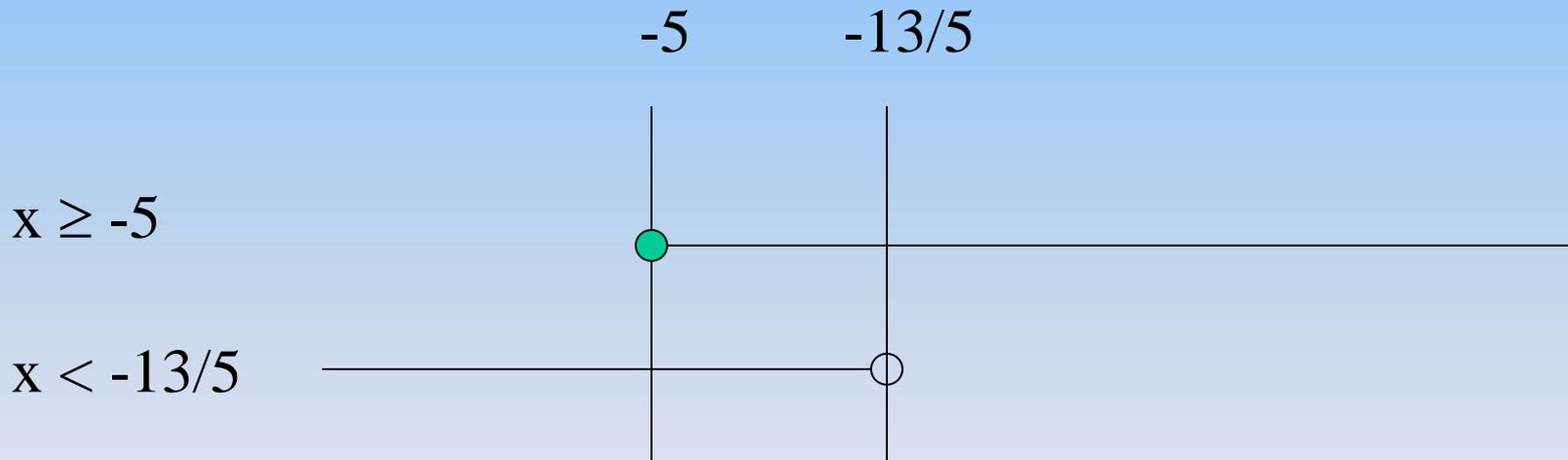


$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < -5\}$$

# CONTINUA ESEMPIO

- Risolviamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5 \\ x^2 - 1 > (x + 5)^2 \rightarrow x^2 - 1 > x^2 + 10x + 25 \rightarrow 10x < -26 \end{cases}$$



$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x < -13/5\}$$

# CONTINUA ESEMPIO

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R}: x < -5\} \cup \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x < -(13/5)\}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}: x < -(13/5)\}$$

# VALORE ASSOLUTO

- Si definisce **valore assoluto** o **modulo** del numero reale  $x$ :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

- Esempio:

$$|2| = 2 \qquad |-4| = 4$$

# DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

- E' una disequazione in cui l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di valore assoluto.
- Distinguiamo due casi:
  - 1)  $|A(x)| < b$        $b \in R^+$
  - 2)  $|A(x)| > b$        $b \in R_0^+$

$A(x)$  polinomio in  $x$

# CASI BANALI

$$|A(x)| < b$$

se  $b \leq 0$

non è mai vera

$$|A(x)| > b$$

se  $b < 0$

è sempre vera

$$|A(x)| < b$$

- Discutere il valore assoluto!

Significa:

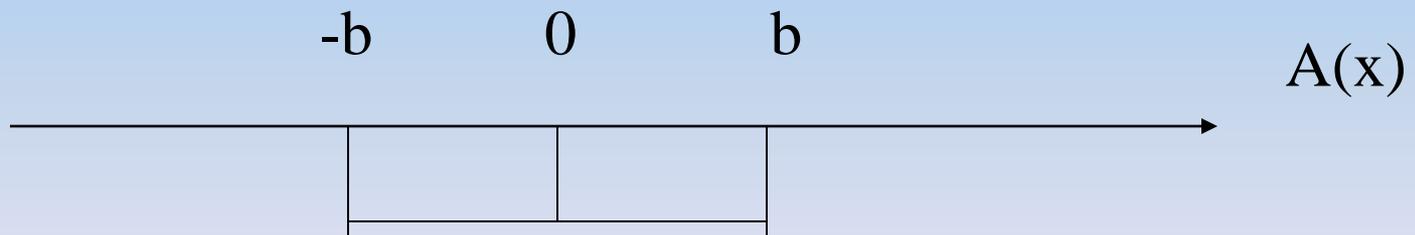
$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ A(x) < b \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} A(x) < 0 \\ -A(x) < b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ A(x) < b \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} A(x) < 0 \\ A(x) > -b \end{array} \right.$$

$$|A(x)| < b$$

- Le soluzioni sono date da:

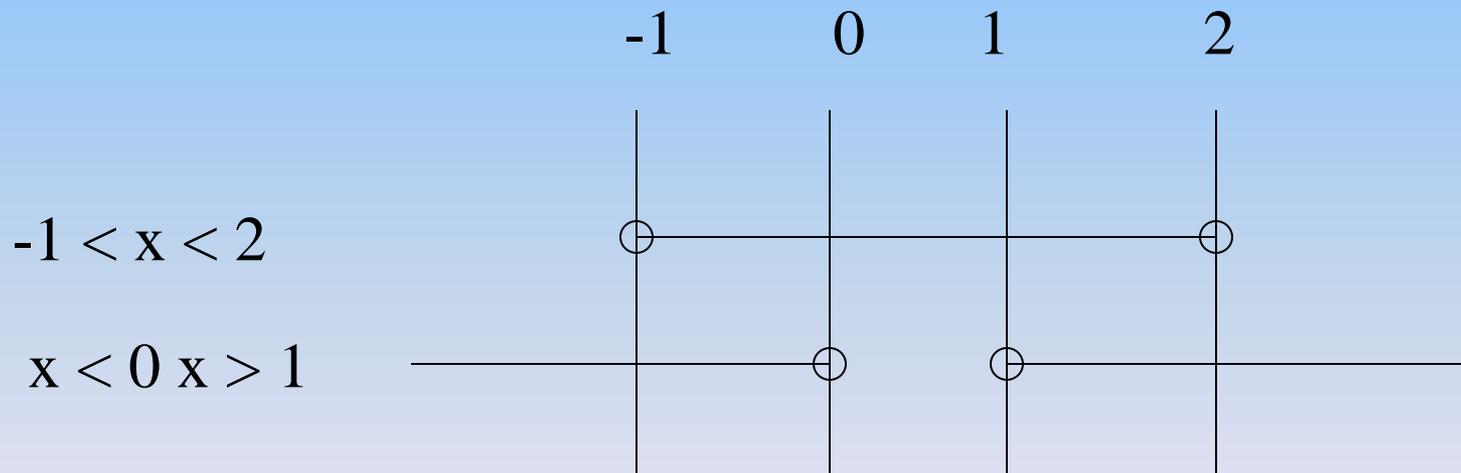
$$\begin{cases} A(x) < b \\ A(x) > -b \end{cases}$$



# ESEMPIO

$$|x^2 - x - 1| < 1$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1 & \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow -1 < x < 2 \\ x^2 - x - 1 > -1 & \rightarrow x^2 - x > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$$

$$|A(x)| > b$$

- Discutere il valore assoluto!

Significa:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ A(x) > b \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} A(x) < 0 \\ -A(x) > b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ A(x) > b \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} A(x) < 0 \\ A(x) < -b \end{array} \right.$$

$$|A(x)| > b$$

- Le soluzioni sono date da:

$$A(x) < -b \cup A(x) > b$$



# ESEMPIO

$$|x^2 - 8x - 1| > 8$$

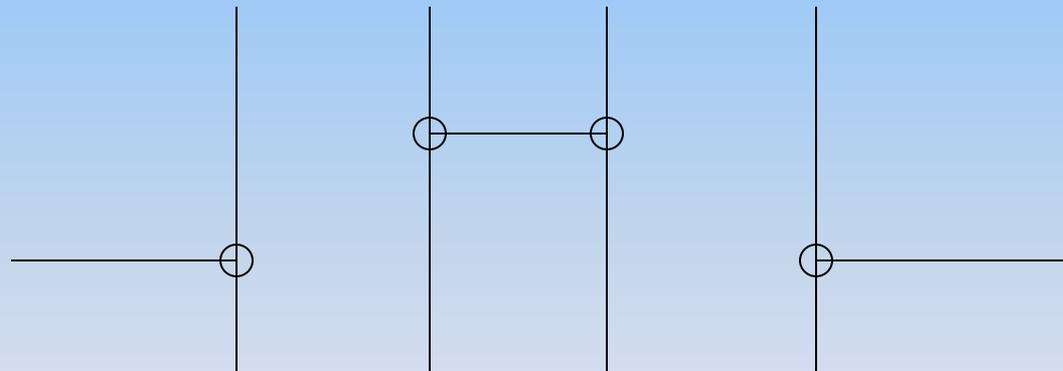
$$x^2 - 8x - 1 < -8 \rightarrow x^2 - 8x + 7 < 0 \rightarrow 1 < x < 7$$

$$x^2 - 8x - 1 > 8 \rightarrow x^2 - 8x - 9 > 0 \rightarrow x < -1 \quad x > 9$$

-1      1      7      9

$$1 < x < 7$$

$$x < -1 \quad x > 9$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 7\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 9\}$$