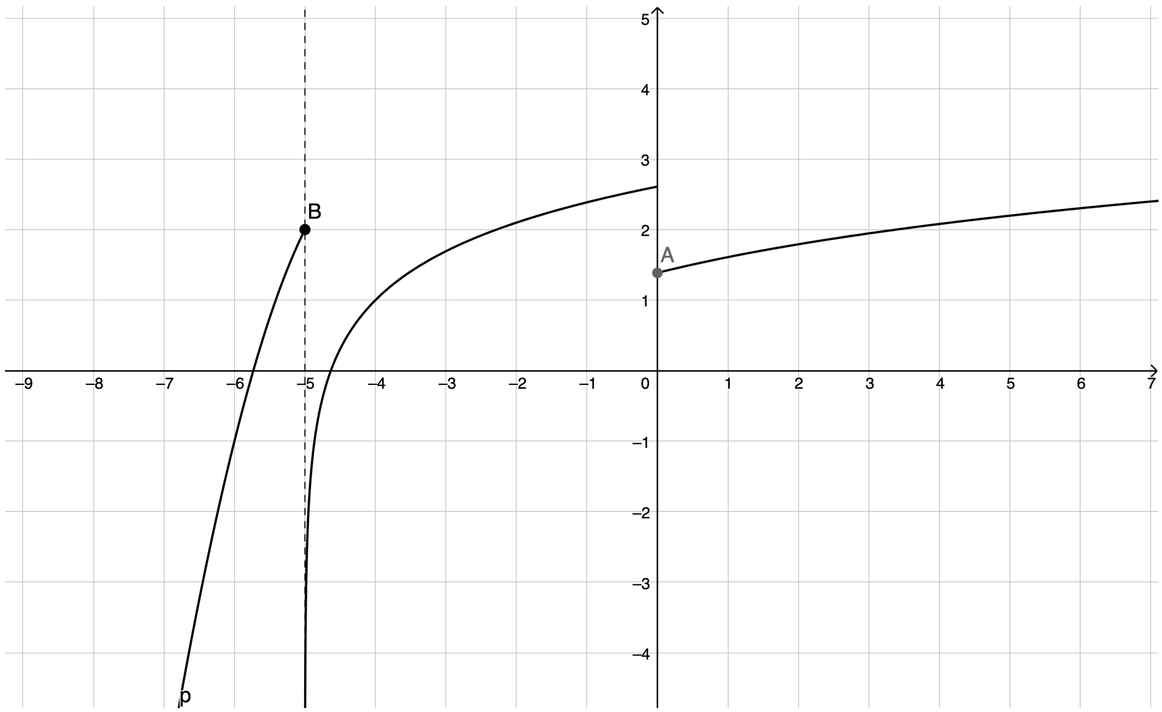
Prova esame scritto del 6 giugno 2022
Corso di laurea in Economia e Commercio - LUMSA, Palermo, a.a. 2021/22
Docente Luciano Seta

Nome e Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

1. (4 punti) Se la curva in figura è il grafico della funzione $f(x)$ rispondi alle seguenti domande (Vero/Falso):



1.	$f(-5) = 2$	Vero	Falso
2.	f ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$	Vero	Falso
3.	$x = -5$ asintoto orizzontale	Vero	Falso
4.	$f'(x) \geq 0$ dove definita	Vero	Falso

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{e^{x^2-3}}{x^2-3}$, calcola i seguenti limiti:

   (a) (1 punto)
   $$\lim_{x \to -\sqrt{3}^{\pm}} f(x) = \dots, \qquad \lim_{x \to \sqrt{3}^{\pm}} f(x) = \dots$$

   (b) (1 punto)
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dots, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \dots.$$

   (c) (4 punti) Rispondi alle seguenti domande (Vero/Falso):

1.	La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$	Vero	Falso
2.	La funzione ha asintoti orizzontali	Vero	Falso
3.	La funzione è sempre crescente	Vero	Falso
4.	$f(x) \leq 0$ per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$	Vero	Falso

3. Date le funzioni:
$$f_1(x) = e^{x^2}; \quad f_2(x) = e^{3-2x^2}, \quad f_3(x) = e^{3-x^4}$$

(a) (2 punti) Trova gli zeri della funzione

$$g(x) = \ln\left(\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)}\right).$$

(b) (2 punti) Trova gli eventuali punti di massimo e minimo di $g(x)$.

4. Data la parabola $y = x^2$:
   (a) (2 punti) determina l'equazione della retta r che interseca la parabola in $x = 0$ e $x = 1$;
   (b) (2 punti) trova, se esiste, una valore di $x \in [0; 1]$ tale che la retta tangente alla parabola ha la stessa pendenza della retta r trovata al punto precedente.

5. L'equazione $e^{PQ} + P^2 - Q - 2 = 0$ individua nel piano $(Q; P)$ una curva:
   (a) (1 punto) verifica che il punto $(0; 1)$ appartiene alla curva;
   (b) (2 punti) verifica se in un intorno del punto sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Dini, im particolare se $f'_P(0; 1) \neq 0$;
   (c) (1 punto) per la funzione $P = g(Q)$, definita implicitamente, calcola $g'(0)$.

6. Data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5y^2,$$

   (a) (2 punti) determina gli eventuali punti stazionari;
   (b) (2 punti) stabiliscine la natura.

7. (3 punti) Determina per quali valori di λ è invertibile la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. (3 punti) Date le seguenti funzioni per la domanda e l'offerta per un bene in un mercato perfettamente concorrenziale:

$$Q = 10 - \frac{1}{2}P \qquad \text{e} \qquad Q = 6P - 3,$$

stabilisci quale funzione rappresenta l'offerta e quale la domanda, e giustifica il risultato sia dal punto di visto matematico che economico. Calcola la quantità e il prezzo all'equilibrio e rappresenta graficamente la situazione nel piano $(Q; P)$, evidenziando i coefficienti angolari delle funzioni disegnate.

9. Data la funzione di utilità:

$$U(X, Y) = XY^4,$$

dopo averne stabilito il tipo, spiega matematicamente il concetto di derivata parziale e il suo legame con il *saggio marginale di sostituzione*. Determina:
   (a) (2 punti) la scelta ottima del consumatore, se il reddito è pari a 300, il prezzo di X è $p_X = 0{,}4$, quello di Y è $p_Y = 1$;
   (b) (1 punto) la rappresentazione grafica evidenziando la pendenza della retta che rappresenta il *vincolo di bilancio.*

10. (3 punti) Siano date la funzione di utilità intertemporale:

$$U = C_1^{\frac{1}{3}} C_2^{\frac{2}{3}},$$

il reddito disponibile del primo periodo $m_1 = 10000$, quello del secondo periodo $m_2 = 14560$ e $i = 4\%$ il tasso d'interesse. Determina la scelta ottima di consumo e di risparmio applicando il concetto di attualizzazione nel vincolo di bilancio.