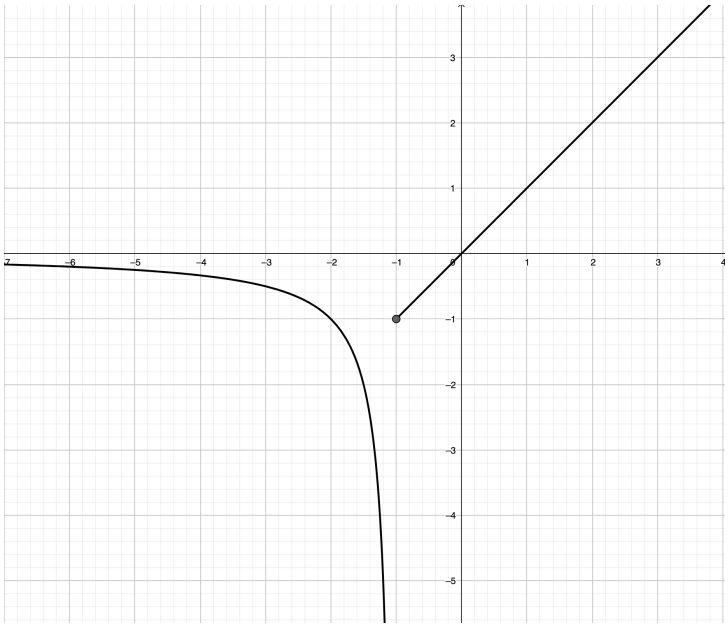
Prova esami 19 luglio 2021
Corso di laurea in Economia e Commercio - LUMSA, Palermo, a.a. 2020/21
Docente Luciano Seta

Nome e Cognome: _____

Matricola: _____

1. (4 punti) Se la curva in figura è il grafico della funzione $f(x)$ rispondi alle seguenti domande (Vero/Falso):



1.	$f(x)$ non è continua in $x = 0$	Vero	Falso
2.	$x = -1$ è un punto di discontinuità di prima specie	Vero	Falso
3.	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$	Vero	Falso
4.	$f(x) \leq 0$ per $x < -1$	Vero	Falso

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\ln(x+5)}$, calcola i seguenti limiti:

   (a) (1 punto)

   $$\lim_{x \to -5^+} f(x) = \ldots, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots$$

   (b) (1 punto)

   $$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \ldots, \qquad \lim_{x \to -4^-} f(x) = \ldots.$$

   (c) (4 punti) Rispondi alle seguenti domande (Vero/Falso):

1.	La funzione è definita per ogni numero reale	Vero	Falso
2.	La funzione ha asintoto verticale	Vero	Falso
3.	La funzione è continua	Vero	Falso
4.	$f(x) \geq 0$ in tutto il suo dominio	Vero	Falso

3. Data la funzione

   $$f(x) = \ln^2(x^2 - 1).$$

   (a) (2 punti) Determina eventuali punti di massimo e minimo nel suo dominio di definizione.

(b) (2 punti) Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto

$$x_0 = \sqrt{e+1}.$$

4. Data la funzione:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}},$$

(a) (1 punto) Fai vedere che è equivalente alla funzione: $f(x) = \left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^2$.

(b) (2 punti) Calcola la derivata prima e studiane il segno.

5. (4 punti) Considera la funzione:

$$F(u,v) = u^2 + (v-1)^2 - 4.$$

Verifica che nell'intorno del punto $(2,1)$ l'equazione $F(u,v) = 0$ definisce implicitamente una funzione $u = h(v)$, e calcola la derivata $h'(1)$.

6. Considera la funzione di due variabili:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$$

(a) (2 punti) Calcola gli eventuali punti stazionari.

(b) (2 punti) Stabilisci la natura dei punti stazionari trovati (massimi, minimi, sella).

7. (4 punti) Studia le soluzione del seguente sistema lineare al variare di k:

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky = k \end{cases}$$

8. Nel mercato perfettamente concorrenziale un bene è rappresentato dalla funzione di domanda e di offerta.

$$P = \frac{Q}{20} + 5 \qquad \text{e} \qquad P = 80 - \frac{Q}{30}$$

Dopo aver individuato tra le due funzioni scritte sopra quale appartiene alla domanda e quale all'offerta e averne spiegato il motivo (matematicamente ed economicamente), si determini:

(a) (2 punti) la quantità prodotta ed il prezzo in equilibrio e rappresentare graficamente dando una spiegazione matematica del grafico delle due funzioni;

(b) (2 punti) Calcolare l'elasticità della della domanda e dell'offerta attraverso l'applicazione del concetto di derivata.

9. Sia data la seguente funzione di utilità:

$$U(x,y) = x^2 y^{12}.$$

Dopo avere definito di che tipo di funzione di utilità si tratta e avere spiegato matematicamente il concetto di derivata parziale collegato al SMS, determinare:

(a) (2 punti) la scelta ottima del consumatore se il reddito e pari a 16, il prezzo di x è $p_x = 1,6$, quello di y è $p_y = 1$;

(b) (1 punto) la rappresentazione grafica;

(c) (1 punto) la pendenza della retta che rappresenta il vincolo di bilancio.

10. (4 punti) Data la funzione di utilità intertemporale:

$$U = C_1 C_2,$$

il reddito disponibile del primo periodo è $m_1 = 1000$, quello del secondo periodo è $m_2 = 612$. Sia infine, il tasso d'interesse pari ad $i = 2\%$. Determinare la scelta ottima di consumo e di risparmio applicando il concetto di attualizzazione nel vincolo di bilancio.