Soluzioni Prova scritta - 10 gennaio 2019
Corso di laurea in Economia e Commercio
LUMSA Palermo, a.a. 2018/19

1. Data la funzione:
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \frac{1}{x},$$
   (a) (1 punto) Quali tra questi punti appartengono al dominio i f: $x = 0$, $x = -3$, $x = -5$, e calcolo, quando possibile, $f(0)$, $f(-3)$, $f(-5)$.

   Si può facilmente verificare che per $x = 0$ la funzione non è calcolabile dato che si ha la radice di un numero negativo e $1/0$. Negli altri due punti non si hanno problemi. D'altra parte il dominio della funzione è $x \leq -3$ o $x \geq 3$.

   (b) (2 punti) Se si indica con $f'(x)$ la derivata di $f(x)$ calcola i seguenti limiti:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \sqrt{+\infty - 9} + \cancelto{0}{\frac{1}{\pm\infty}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\pm\infty}{\infty} - \cancelto{0}{\frac{1}{\infty}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm x}{|x|\sqrt{1 - 9/x^2}} = \pm 1$$

2. Se in t ore di lavoro vengono prodotte $x(t) = 60t - \frac{3}{2}t^2$ unità di un certo bene (con $0 \leq t \leq 15$). Il costo unitario sia dato dalla funzione $C(x) = 5000 + 100x$.

   (a) (1 punto) Scrivi la funzione $C(t)$ che da il costo in funzione delle ore di lavoro.

   Si deve scrivere
$$C(t) = C(x(t)) = 5000 + 100\left(60t - \frac{3}{2}t^2\right) = 5000 + 6000t - 150t^2$$

   (b) (1 punto) Calcola il costo dopo 5 ore di lavoro.

   Si vuole $C(t = 5)$ ovvero
$$C(5) = 5000 + 6000 \cdot 5 - 150 \cdot 5^2 = 31250$$

3. Data la seguente funzione di domanda $q = 100 - 25p + \frac{1}{2}p^2$, dove p è il prezzo unitario e q la quantità richiesta,

   (a) (2 punti) calcola l'elasticità della domanda rispetto al prezzo $p^* = 2$.

   Ricordiamo la definiione:
$$\mathrm{El}_p q(p^*) = \frac{p^*}{q^*}\left(\frac{dq}{dp}\right)_{p=p^*}.$$
   Si ha che $q^* = 100 - 25p^* + \frac{1}{2}(p^*)^2 = 100 - 25(2) + \frac{1}{2}(2)^2 = 100 - 50 + 2 = 52.$

   Inoltre $\left(\frac{dq}{dp}\right)_{p=p^*} = -25 + p^* = -23.$

   Si ha quindi
$$\mathrm{El}_p q(p^*) = \frac{p^*}{q^*}\left(\frac{dq}{dp}\right)_{p=p^*} = \frac{2}{52}(-23) = -0{,}885.$$

(b) (2 punti) di quanti punti percentuale varia la domanda se il prezzo $p^* = 2$ aumenta dell'1%.

La risposta è esattamente l'elasticità appena calcolato, ovvero per un incremento dell'1% del prezzo, partire dal prezzo $p = 2$, la domanda **diminuisce** di circa lo $0,88\%$.

Questo risultato lo si può anche verificare con un calcolo diretto, ricordando la definizione di variazione percentuale:

$$\Delta q\% = \frac{q(\text{fin}) - q(\text{ini})}{q(\text{ini})} \cdot 100,$$

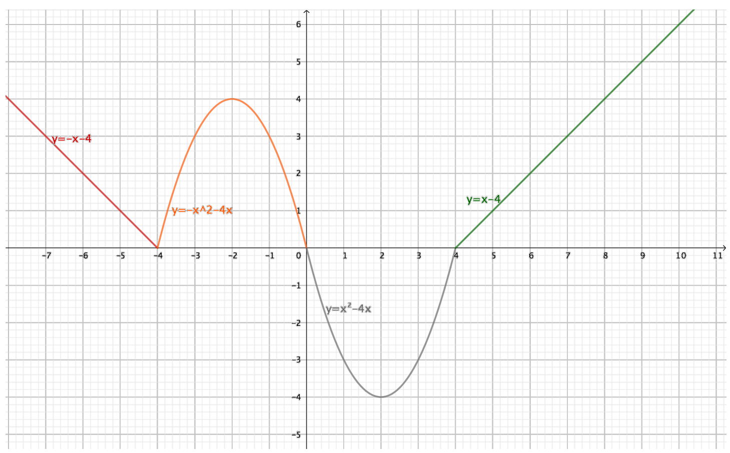
con $q(\text{ini}) = q(p = 2) = 52$ e $q(\text{fin}) = q(p = 2{,}02) = 51{,}54$.

Si ottiene quindi:

$$\Delta q\% = \frac{q(\text{fin}) - q(\text{ini})}{q(\text{ini})} \cdot 100 = \frac{51{,}54 - 52}{52} \cdot 100 = -0{,}885$$

4. (a) (2 punti) Disegna il grafico di $f(x)$ definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{se } x < -4 \\ -x^2 - 4x, & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ x - 4, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$



(b) (2 punti) data la seguente funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq 4 \\ 3x + 2, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

trova la funzione composta $(g \circ f)(x)$.

La funzione composta è così definita:

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2f(x) + 1, & \text{se } f(x) \geq 4 \\ 3f(x) + 2, & \text{se } f(x) < 4 \end{cases}$$

Dal grafico di $f(x)$ si vede che:

$$f(x) \geq 4 \quad \text{per} \begin{cases} x \leq -8, & \text{con } f(x) = -x - 4 \\ x = -2, & \text{con } f(x) = -x^2 - 4x \\ x \geq 8, & \text{con } f(x) = x - 4 \end{cases}$$

$$f(x) < 4 \quad \text{per} \begin{cases} -8 < x < -4, & \text{con } f(x) = -x - 4 \\ -4 < x < 0 \text{ e } x \neq -2, & \text{con } f(x) = -x^2 - 4x \\ 0 \leq x \leq 4, & \text{con } f(x) = x^2 - 4x \\ 4 < x < 8, & \text{con } f(x) = x - 4 \end{cases}$$

Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2(-x-4)+1, & \text{se } x \leq -8 \\ 2(-x^2-4x)+1, & \text{se } x = -2 \\ 2(x-4)+1, & \text{se } x \geq 8 \\ 3(-x-4)+2, & \text{se } -8 < x < -4 \\ 3(x^2-4x)+2, & \text{se } -4 < x < 0 \text{ e } x \neq -2 \\ 3(x^2-4x)+2, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 3(x-4)+2, & \text{se } 4 < x < 8 \end{cases}$$

5. (a) (2 punti) Determina la derivata prima della funzione $y(x)$ definita implicitamente dall'equazione

$$x^2 - y^3 + \ln y = 3.$$

Si devono derivare rispetto a x i due lati dell'equazione, considerando che $y = f(x)$, si ha quindi:

$$2x - 3y^2y' + \frac{1}{y}y' = 0 \Rightarrow y'\left(3y^2 - \frac{1}{y}\right) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2xy}{3y^3 - 1}.$$

(b) (1 punto) Calcola $y'(x)$ nel punto (2;1).
Sostituendo nell'espressione appena trovata per y' i valori $x = 2$ e $y = 1$ si trova:

$$y'(2) = \frac{2(2)(1)}{3(1)^3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

6. Un'impresa in concorrenza perfetta opera con altre 49 imprese identiche e fronteggia la seguente funzione di lungo periodo:

$$C_T = 20Q - 16Q^2 + 4Q^3.$$

Ricordando la condizione di equilibrio in regime di concorrenza $MC = AC$, determinare:

(a) (2 punti) prezzo e quantità di equilibrio del settore;
Definizioni:

$$MC \equiv \frac{dC_T}{dQ} = 20 - 32Q + 12Q^2,$$

$$AC \equiv \frac{C_T}{Q} = 20 - 16Q + 4Q^2.$$

Equilibrio:

$$MC = AC \Rightarrow 20 - 32Q + 12Q^2 = 20 - 16Q + 4Q^2 \Rightarrow 8Q^2 - 16Q = 0 \Rightarrow Q^E = 2,$$

Per il prezzo basta ricordare che in questo caso $P = AC$ e quindi si ha

$$P^E = 20 - 16Q^E + 4Q^2 = 20 - 16(2) + 4(2)^2 = 20 - 32 + 16 = 4.$$

(b) (1 punto) il profitto;

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P^E \cdot Q^E - C_T(Q^E) = 8 - 20(2) + 16(2)^2 - 4(2)^3 = 8 - 40 + 64 - 32 = 0.$$

(c) (1 punto) la quantità totale scambiata sul mercato.
Essendoci 50 imprese sul mercato la quantità scambiata sarà data da $Q_{\text{tot}} = 2 \cdot 50 = 100$.

7. Calcola i seguenti integrali definiti:

(a) (1 punto)

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{t+1}\, dt = \int_{-1}^{0} (t+1)^{1/2}\, dt = \left[\frac{3}{2}(t+1)^{3/2}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}.$$

(b) (1 punto)

$$\int_{1}^{3} \frac{s-1}{s^2-2s+5}\, ds = \frac{1}{2}\int_{1}^{3} \frac{d(s^2-2s+5)}{s^2-2s+5} = \frac{1}{2}\left[\log(s^2-2s+5)\right]_{1}^{3} = \frac{1}{2}(\log 8 - \log 4) = \frac{1}{2}\log(2).$$

(c) (2 punti)

$$\int_{5}^{6} u^3 e^{-u}\, du$$

Bisogna integrare tre volte per parti:

$$\begin{aligned}
\int u^3 e^{-u}\, du &= -u^3e^{-u} + 3\int u^2 e^{-u}\, du = \\
&= -u^3e^{-u} + 3\left(-u^2e^{-u} + 2\int ue^{-u}\, du\right) = \\
&= -u^3e^{-u} - 3u^2e^{-u} + 6\int ue^{-u}\, du = \\
&= -u^3e^{-u} - 3u^2e^{-u} + 6\left(-ue^{-u} - e^{-u}\right) = \\
&= -u^3e^{-u} - 3u^2e^{-u} - 6ue^{-u} - 6e^{-u} = \\
&= -e^{-u}\left(u^3 + 3u^2 + 6u + 6\right).
\end{aligned}$$

Trovata la primitiva è facile calcolare l'integrale definito.

(d) (2 punti)

$$\int_{1}^{+\infty} -\frac{3}{x^2}\, dx.$$

Ci troviamo di fronte ad un integrale improprio, essendo l'intervallo di integrazione illimitato. Si tratta di calcolare il seguente limite:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{1}^{M} -\frac{3}{x^2}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{3}{x}\right]_{1}^{M} = \lim_{M\to+\infty} \frac{3}{M} - 3 = -3.$$

8. (4 punti) Trova i massimi e i minimi relativi della funzione:

$$f(x,y) = e^{x^2+6y^2+14}$$

Imponiamo le condizioni del primo ordine:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) = & 0 \\ 12y\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 0 \\ y = & 0 \end{cases}$$

Per stabilire la natura del punto critico (0;0), consideriamo le condizioni del secondo ordine:

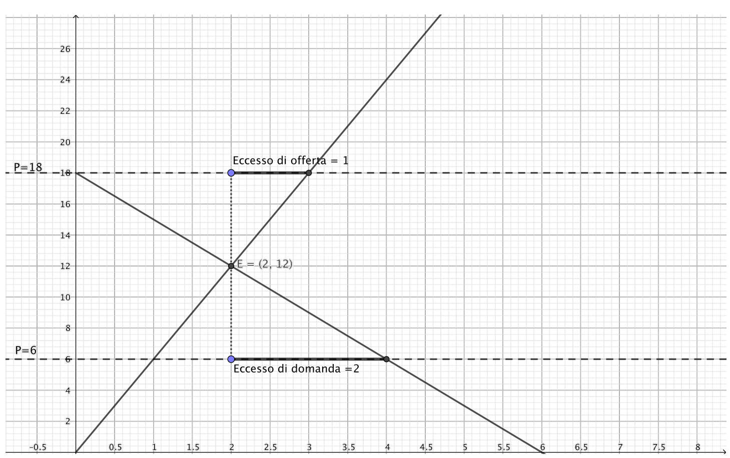
$$\begin{aligned} A \equiv \partial_{xx} f(x,y) &= 2\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) + 4x^2\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) = 2(2x^2+1)\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) \\ B \equiv \partial_{yy} f(x,y) &= 12\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) + 144y^2\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) = 12(12y^2+1)\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) \\ C \equiv \partial_{xy} f(x,y) &= 24xy\left(e^{x^2+6y^2+14}\right) \end{aligned}$$

Quindi si ottiene nell'origine:

$$\begin{aligned} A \equiv \partial_{xx} f(0,0) &= 2e^{14} \\ B \equiv \partial_{yy} f(0,0) &= 12e^{14} \\ C \equiv \partial_{xy} f(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

$O(0;0)$ **minimo** poiché $AB - C^2 > 0$ e $A > 0$.

9. La curva di offerta di mele è data dall'equazione $P = 6Q$, mentre la curva di domanda è data da $P = 18 - 3Q$. Determinare:
   (a) (2 punti) la configurazione di equilibrio del mercato;
   (b) (1 punto) al prezzo di euro 18 si avrà eccesso di produzione o penuria? In quale misura?
   (c) (1 punto) al prezzo di euro 6 si avrà eccesso di produzione o penuria? In quale misura?
   (d) (2 punti) Rappresentare tutto graficamente.



10. Un consumatore ha preferenze sui beni X_1 e X_2 rappresentate dalla seguente funzioni di utilità:

$$U(X_1; X_2) = X_1^{1/2} X_2^{1/2}.$$

Calcolare:

(a) (1 punto) Il saggio marginale di sostituzione tra i beni X_1 e X_2.

La definizione di SMS è la seguente:

$$\text{SMS} = \frac{\partial_x U}{\partial_y U} \quad \text{per cui si ottiene} \quad SMS = \frac{1/2 X_1^{-1/2} X_2^{1/2}}{1/2 X_1^{1/2} X_2^{-1/2}} = \frac{X_2}{X_1}$$

(b) (2 punti) Il paniere di consumo ottimo se $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ e $m = 100$.

Risolvere il sistema dato dal **vincolo di bilancio**: $P_1 X_1 + P_2 X_2 = m$ e dall'equazione $SMS = P_1/P_2$, ovvero

$$\begin{cases} X_1 & +2X_2 = 100 \\ \frac{X_2}{X_1} & = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 & +2X_2 = 100 \\ X_1 & = 2X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 & = 25 \\ X_1 & = 50 \end{cases}$$

(c) (1 punto) Rappresentare graficamente.