Soluzione prova scritta - 11 febbraio 2019 **A**
Corso di laurea in Economia e Commercio
LUMSA Palermo, a.a. 2018/19

1. Data la funzione:
$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x-2)},$$
   (a) (2 punti) Determina il dominio di f e calcola, se possibile, i valori $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(2{,}001)$.
   Il dominio è data dalle soluzioni di:
$$\begin{aligned} x-1 \geq\ & 0 \\ x(x-2) \neq\ & 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & x \geq 1 \\ & x \neq 0 \qquad x \neq 2 \end{aligned}$$
   Per cui si ha
$$\mathrm{Dom}_f = [1; 2[\cup]2; +\infty).$$
   Dato che i punti $x = 0$, $x = -2$, e $x = 2$ non appartengono al dominio, la funzione non vi può essere calcolata.
$$f(2{,}001) = \frac{\sqrt{1{,}001}}{2{,}001 \cdot 0{,}001} = 500{,}00.$$
   (b) (2 punti) Stabilisci in quali intervalli la funzione è positiva e in quali negativa.
   Bisogna studiare il segno di $f(x)$. Ora si ha che sul dominio il numeratore è sempre positivo, per il denominatore si ha che il segno è positivo per valori esterni all'intervallo delle due radici $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Quindi nell'intervallo $]1; 2[$ la funzione è negativa, mentre nell'intervallo $]2, +\infty[$ la funzione è positiva.
   (c) (2 punti) Indicando con $f'(x)$ la derivata di $f(x)$, calcola i seguenti limiti:
   Si calcoli la derivata prima:
$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{(1/2)(x-1)^{(-1/2)}x(x-2) - (x-1)^{(1/2)}(2x-2)}{x^2(x-2)^2} \\ =& \frac{x(x-2) - 4(x-1)^2}{2x^2(x-1)^2\sqrt{x-1}} = \frac{-3x^2+6x-4}{2x^2(x-1)^{3/2}} \end{aligned}$$
$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}(x-2)} = \frac{1}{\infty} = 0;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \frac{-3+\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}}{2(x-1)^{3/2}} = \frac{-3}{\infty} = 0.$$

2. (3 punti) Se le popolazioni di due nazioni crescono seconda la legge $P(t) = P(t_0)(1+r)^{t-t_0}$ con $P(t_0) = 11$ (milioni) e $r = 0{,}02$ per la nazione 1, e $P(t_0) = 10$ (milioni) e $r = 0{,}05$ per la nazione 2. Stabilisci se dopo 4 anni la popolazione della nazione 2 supererà quella della nazione 1, e dopo 3 anni?

   Nazione 1 dopo 3 anni: $P(4) = 11 \cdot 1{,}02^3 = 11{,}6732$; nazione 2 dopo 3 anni: $P(4) = 10 \cdot 1{,}05^3 = 11{,}5762$. Dopo 3 anni la popolazione della nazione 1 è ancora superiore a quella della nazione 2, come era all'inizio.

   Nazione 1 dopo 4 anni: $P(4) = 11 \cdot 1{,}02^4 = 11{,}9067$; nazione 2 dopo 4 anni: $P(4) = 10 \cdot 1{,}05^4 = 12{,}1551$. Dopo 4 anni la popolazione della nazione 2 ha superato quella della nazione 1.

3. Si consideri il PIL (Prodotto Interno Lordo) italiano annuale negli anni dal 2013 al 2017 (in milioni di euro):

$t_{2013} = 1.541.171{,}9$; $t_{2014} = 1.542.923{,}8$; $t_{2015} = 1.557.180{,}3$; $t_{2016} = 1.575.018{,}0$; $t_{2017} = 1.599.773{,}5$.

(a) (1 punto) A quanti miliardi di euro corrisponde un punto percentuale di PIL nel 2017?

Il PIL nel 2017 è stato pari a 1.599.773,5 milioni di euro. Quindi divedendo per cento si ha che un punto percentuale è 15.997,7735 milioni di euro, ovvero circa 16 miliardi di euro.

(b) (2 punti) Calcola le variazioni del PIL, assolute e percentuali, nei periodi: $[2013; 2014]$; $[2014; 2015]$; $[2015; 2016]$; $[2016; 2017]$.

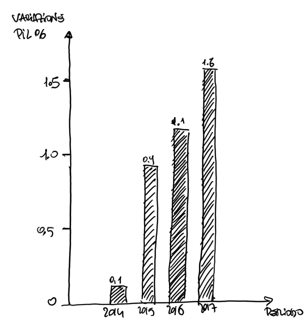
Variazioni assolute:

$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2013;2014)} = t_{2014} - t_{2013} = 1.751{,}9;$$
$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2014;2015)} = t_{2015} - t_{2014} = 14.256{,}5;$$
$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2015;2016)} = t_{2016} - t_{2015} = 17.837{,}7;$$
$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2016;2017)} = t_{2017} - t_{2016} = 24.755{,}5.$$

Variazioni percentuali:

$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2013;2014)}\% = \frac{t_{2014} - t_{2013}}{t_{2013}} \cdot 100 = 0{,}11;$$
$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2014;2015)}\% = \frac{t_{2015} - t_{2014}}{t_{2014}} \cdot 100 = 0{,}92;$$
$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2015;2016)}\% = \frac{t_{2016} - t_{2015}}{t_{2015}} \cdot 100 = 1{,}15;$$
$$\Delta \mathrm{PIL}_{(2016;2017)}\% = \frac{t_{2017} - t_{2016}}{t_{2016}} \cdot 100 = 1{,}57.$$

(c) (2 punti) Riporta in un grafico l'andamento nel tempo della variazione percentuale (annuale) del PIL italiano, usando i valori calcolati al punto precedente.



4. (a) (2 punti) Disegna il grafico di $f(x)$ definita a tratti

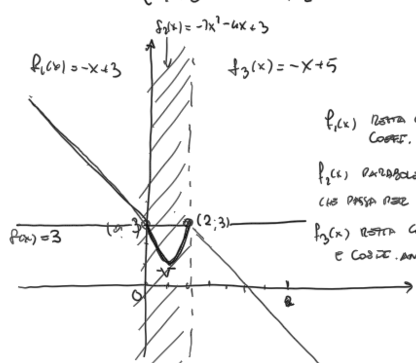
$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } x < 0 \\ 2x^2 - 4x + 3, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -x+5, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(b) (2 punti) data la seguente funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 8, & \text{se } x \geq 3 \\ 2x - 6, & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

trova la funzione composta $(g \circ f)(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & x<0 \\ 2x^2-4x+3 & 0 \leq x \leq 2 \\ -x+5 & x>2 \end{cases}$$



$f_1(x)$ RETTA CON INTERCETTA $n=3$ COEFF. ANGOLARO $m=-1$

$f_2(x)$ PARABOLA CON VERTICE $V(1,1)$ CHE PASSA PER : PUNTI $(0;3)$ e $(2;3)$

$f_3(x)$ RETTA CON INTERCETTA $n=5$ e COEFF. ANG. $m=-1$

$$g(f(x)) = \begin{cases} f(x)^2 - 8 & \text{PER } f(x) \geq 3 \\ 2f(x) - 6 & \text{PER } f(x) < 3 \end{cases}$$

$f(x) \geq 3$ PER $x \leq 0$ $f = f_1(x)$

PER $x = 0$ e $x = 2$ $f = f_2(x)$

$f(x) < 3$ PER $0 < x < 2$ $f = f_2(x)$

PER $x > 2$ $f = f_3(x)$

5. (3 punti) Calcola la derivata y' quando y è definita implicitamente attraverso l'equazione:

$$\ln(x^2 + y) + \cos(y^2) = 1.$$

L derivazione implicita fornisce:

$$\frac{1}{x^2+y}(2x + y') - \sin(y^2) \cdot 2yy' = 0; \quad y'\left(\frac{1}{x^2+y} - 2y\sin(y^2)\right) = -\frac{2x}{x^2+y};$$

$$y' = \frac{2x}{2y(x^2+y)\sin(y^2) - 1}$$

6. Un monopolista opera in un mercato caratterizzato dalla seguente funzione di domanda $Q = 45 - 3P$, e una funzione di costo totale $C_T = 10 + 3Q$.

(a) (2 punti) Determinare l'equilibrio e il profitto d'equilibrio per il monopolista.
Condizione d'equilibrio per il monopolista: costo marginale = ricavo marginale ($MC = MR$).

(b) (2 punti) Calcolare P^*, Q^* e Π^* (profitto) in concorrenza perfetta.

7. Data la funzione di due variabili:

$$f(x;y) = 2x^3 - 3y^2 - 6xy + 6y,$$

(a) (2 punti) determina gli eventuali punti stazionari;

(b) (2 punti) stabiliscine la natura.

8. Se il mercato di un certo bene è caratterizzato dalle seguenti funzioni:

$$P^D = 10 - \frac{1}{4}Q; \qquad\qquad P^O = Q - 5.$$

(a) (2 punti) Determinare l'equilibrio di mercato e rappresentarlo graficamente.

(b) (2 punti) Calcolare il surplus del consumatore, del produttore, sociale.

9. Data la seguente funzione di utilità:

$$U(X_1; X_2) = X_1^{1/2} \cdot X_2^{1/4},$$

sapendo che il reddito è $M = 600$ euro, i prezzi sono $P_1 = 10$ euro e $P_2 = 5$ euro:

(a) (2 punti) Determina la scelta ottima.

(b) (2 punti) Rappresentare graficamente il vincolo di bilancio e lasoluzione.