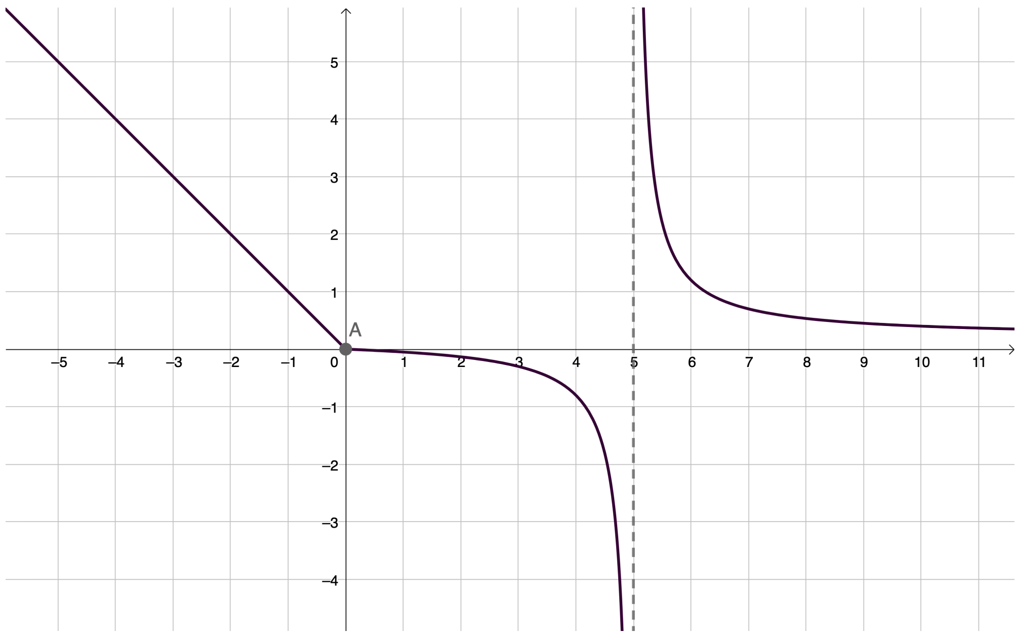
Prova esame scritto del 11 luglio 2022
Corso di laurea in Economia e Commercio - LUMSA, Palermo, a.a. 2021/22
Docente Luciano Seta

Nome e Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

1. (4 punti) Se la curva in figura è il grafico della funzione $f(x)$ rispondi alle seguenti domande (Vero/Falso):



1.	$f(5) = 0$	Vero	Falso✓
2.	f ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$	Vero	Falso✓
3.	$x = 5$ asintoto verticale	Vero✓	Falso
4.	$f'(x)$ è continua	Vero	Falso✓

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{x + e^x}{x^2 + \ln x - 1}$, calcola i seguenti limiti:

   (a) (1 punto)
   $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

   (b) (1 punto)
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^-.$$

   (c) (4 punti) Rispondi alle seguenti domande (Vero/Falso):

1.	La funzione è definita per $x > 0$	Vero✓	Falso
2.	La funzione ha un asintoto verticale	Vero✓	Falso
3.	La funzione è sempre positiva	Vero	Falso✓
4.	$f(0) = 0$	Vero	Falso✓

3. (3 punti) Date le due funzioni:
   $$f_1(x) = e^{-3+x} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \ln(2x),$$
   facendo attenzione ai domini di definizione, risolvi il seguente sistema:
   $$\begin{cases} y = f_1(f_2(x)) \\ y = f_2(f_1(x)) \end{cases}$$

Soluzione

$f_1(f_2(x)) = f_1(\ln(2x)) = e^{-3+\ln(2x)} = e^{-3} \cdot e^{\ln(2x)} = 2xe^{-3}$; dominio $x > 0$

$f_2(f_1(x)) = f_2(e^{-3+x}) = \ln(2e^{-3+x}) = \ln 2 + \ln(e^{-3+x}) = \ln 2 - 3 + x$; dominio tutto $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y = & 2xe^{-3} \\ y = \ln 2 - 3 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = & \frac{2}{e^3}x \\ y = \ln 2 - 3 + x \end{cases}$$

Soluzione del sistema: $\mathrm{P}\left(\dfrac{e^3(3-\ln(2))}{e^3-2}; \dfrac{2(3-\ln(2))}{e^3-2}\right)$.

4. Data la funzione $y = 2x^2 - \dfrac{1}{2}x^3$:
   (a) (2 punti) trova eventuali punti di massimo e minimo relativi ed assoluti;
   (b) (2 punti) determina l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in $x = 2$.

   Soluzione:

   Derivata prima: $f'(x) = 4x - \dfrac{3}{2}x^2 = 4x\left(1 - \dfrac{3}{8}x\right)$.

   Studio del segno della derivata prima: $f'(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq \dfrac{8}{3}$.

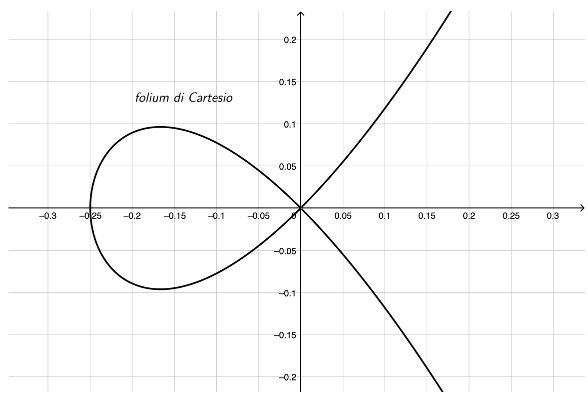
   Si ha quindi $x_1 = 0$ **punto di minimo relativo** e $x_2 = 8/3$ **punto di massimo relativo**.
   Non ha massimo e minimo assoluto dato che la funzione non è limitata:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

5. (3 punti) Data l'equazione

$$F(x, y) = x^2(4x + 1) - y^2 = 0,$$

   che rappresenta la curva nel piano $(x; y)$ detta *folium di Cartesio*, vedi figura a fianco. Stabilire in base al teorema di Dini se nel punto $\mathrm{P}(-1/4; 0)$ è possibile esprimere y come funzione di x: $y = f(x)$, oppure x come funzione di y: $x = g(y)$.



   Soluzione:

   Dal grafico si vede che in un intorno del punto $\mathrm{P}(-1/4; 0)$ non si può esprimere x come funzione di y. Invece è possibile esprimere y come funzione di y come conferma il *teorema di Dini*, dato che:

$$F_x = 2x(4x+1) + 4x^2 = 12x^2 + 1 \quad \text{quindi } F_x(-1/4; 0) \neq 0;$$
$$F_y = 2y \quad \text{quindi } F_y(-1/4; 0) = 0.$$

6. Data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y)^2,$$

   (a) (2 punti) determina gli eventuali punti stazionari;
   (b) (2 punti) stabiliscine la natura.

   Soluzione:

$$\begin{cases} F_x \equiv 8x^3 - 2(x+y) = 0 \\ F_y \equiv 8y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^3 - 2(x+y) = 0 \\ 8x^3 - \quad 8y^3 \quad = \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

   Il sistema diventa:

$$\begin{cases} 8x^3 - 2(x+x) = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -1/\sqrt{2}; x_3 = 1/\sqrt{2}; \\ x \;= y \end{cases}$$

3 punti stazionari:

$$O(0;0); \quad P_1(-1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2}); \quad P_2(1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$$

Natura dei punti stazionari:

$$\begin{cases} F_{xx} \equiv 24x^2 - 2 \\ F_{yy} \equiv 24y^2 - 2 \\ F_{xy} \equiv \ -2 \end{cases}$$

Nell'origine O: $H(0;0) = 0$ **caso dubbio**.
Nel punto P_1:$H(-1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2}) > 0$ e $F_{xx} > 0$ **minimo**.
Nel punto P_2:$H(1/\sqrt{2};1/\sqrt{2}) > 0$ e $F_{xx} > 0$ **minimo**.

7. (3 punti) Dato il sistema omogeneo, determina per quali valori di λ ammette soluzioni non nulle:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \lambda x + z = 0 \\ x \ + z = 0 \end{cases}$$

Calcolare il determinante della matrice A dei coefficienti, ovvero

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene $\det A = \lambda - 1$, quindi il sistema omogeneo ha soluzioni diverse da quella nulla per $\lambda = 1$.

8. Nel mercato perfettamente concorrenziale un bene è rappresentato dalla funzione di domanda e di offerta.

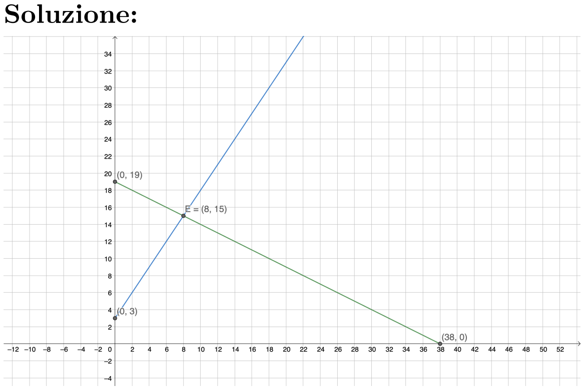
$$Q = 38 - 2P \qquad \text{e} \qquad P = 3 + 1{,}5Q$$

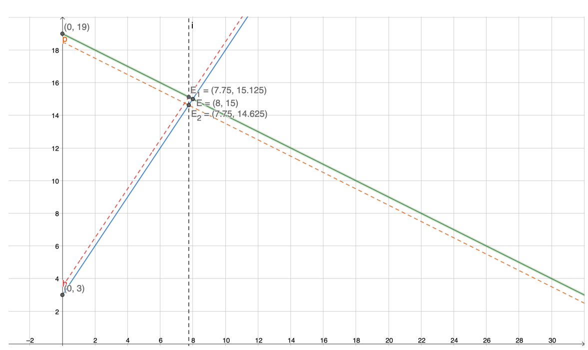
Dopo aver individuato tra le due funzioni scritte sopra quale appartiene alla domanda e quale all'offerta e averne spiegato il motivo (matematicamente ed economicamente), calcolare:

(a) (2 punti) la quantità prodotta ed il prezzo in equilibrio e rappresentare graficamente dando una spiegazione matematica del grafico delle due funzioni;

(b) (2 punti) il nuovo equilibrio dopo l'introduzione di una tassa $t = 0{,}5$ euro, spiegando economicamente e graficamente cosa succede.

Soluzione:





9. Sia data la seguente funzione di utilità:

$$U(x;y) = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

Dopo aver definito di che tipo di funzione di utilità si tratta e aver spiegato matematicamente il concetto di derivata parziale collegato al SMS, determinare:

(a) (1 punto) la scelta ottima del consumatore se il reddito è pari a 180 e il prezzo di x è 2 e il prezzo di y è 3;

(b) (1 punto) la rappresentazione grafica;

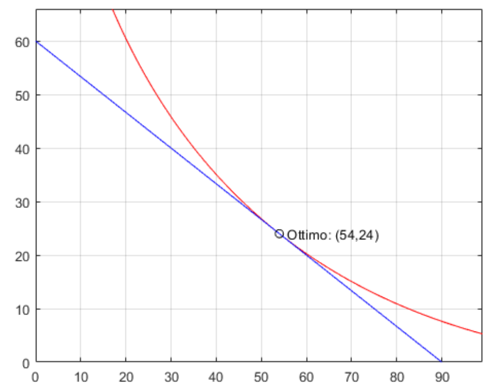
(c) (1 punto) la pendenza della retta che rappresenta il vincolo di bilancio.

Soluzione:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \\ 2x + 3y = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{4}{9} \\ 2x + 3y = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 9y = 0 \\ 2x + 3y = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 9y = 0 \\ 4x + 6y = 360 \end{cases}$$

Ottimo: $O(54; 25)$
Pendenza: $m = -\frac{p_x}{p_y} = -\frac{2}{3} \left(= -\frac{60}{90}\right)$



10. (3 punti) Siano date la funzione di utilità intertemporale:

$$U = C_1^{0,6} C_2^{0,4},$$

il reddito disponibile del primo periodo $m_1 = 2000$, quello del secondo periodo $m_2 = 1050$ e $i = 5\%$ il tasso d'interesse. Determina la scelta ottima di consumo e di risparmio applicando il concetto di attualizzazione nel vincolo di bilancio.

Soluzione:

$$1 + i = 1 + 0{,}05 = 1 + \frac{5}{100} = \frac{21}{20}; \quad \frac{1}{1+i} = \frac{20}{21}$$

Inoltre

$$\begin{cases} U_x = 0{,}6 C_1^{-0{,}4} C_2^{0{,}4} \\ U_y = 0{,}4 C_1^{0{,}6} C_2^{-0{,}6} \end{cases} \Rightarrow \frac{U_x}{U_y} = \frac{0{,}6}{0{,}4} \frac{C_2}{C_1} = \frac{3C_2}{2C_1}$$

Si ha quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{3C_2}{2C_1} = \frac{21}{20} \\ 2000 + 1050\frac{20}{21} = C_1 + \frac{20}{21} C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3C_2}{2C_1} = \frac{21}{20} \\ 3000 = C_1 + \frac{20}{21} C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1800 \\ C_2 = 1260 \end{cases}.$$