Funzioni monotone ed estremi

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice strettamente crescente nel dominio A se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ovvero, all'aumentare del valore della variabile indipendente x aumenta anche il valore della variabile dipendente y.

Una funzione si dice strettamente decrescente nel dominio A se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

ovvero, all'aumentare del valore della variabile indipendente x il valore della variabile dipendente y diminuisce.

Una funzione che verifica una delle due condizioni nel dominio A si dice strettamente monotona.

Le funzioni monotone nel loro insieme di definizione sono iniettive, il viceversa non è sempre vero.

Una funzione si dice crescente, o crescente in senso debole, o non decrescente, nel dominio A se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

ovvero, all'aumentare del valore della variabile indipendente x il valore della variabile dipendente y non diminuisce.

In modo analogo, una funzione si dice decrescente, o decrescente in senso debole, o non crescente, nel dominio A se

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{con } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

ovvero, all'aumentare del valore della variabile indipendente x il valore della variabile dipendente y non aumenta.

Le funzioni che nel loro dominio verificano una delle due definizioni date sopra si dicono monotone in senso debole.

Un funzione f si dice limitata nel suo dominio A se la sua immagine è un insieme limitato, ovvero esistono due numeri a e b tali che: $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in A$. Oppure possiamo anche dire che esiste un numero $L \geq 0$ tale che $|f(x)| \leq L, \forall x \in A$.

La funzione è limitata superiormente in A se e solo se esiste un numero M tale che

$$f(x) \leq M, \forall x \in A$$

La funzione è limitata inferiormente in A se e solo se esiste un numero m tale che

$$f(x) \geq m, \forall x \in A$$

Quindi una funzione è limitata se e solo se è limitata sia inferiormente che superiormente.

Il più piccolo numero reale che può essere usato come M nella definizione data sopra, ovvero che maggiora $f(A)$, è detto estremo superiore della funzione. Si indica con $\sup f$

Il più grande numero reale che può essere usato come m nella definizione data sopra, ovvero che minora $f(A)$, è detto estremo inferiore della funzione. Si indica con $\inf f$

Quindi il numero M è l'estremo superiore della funzione f se e solo se:

$$\forall x \in A,\ f(x) \leq M, \text{ o anche } \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \text{ tale che } f(x) > M - \varepsilon$$

Quindi il numero m è l'estremo inferiore della funzione f se e solo se:

$$\forall x \in A,\ f(x) \geq m, \text{ o anche } \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \text{ tale che } f(x) < m + \varepsilon$$

Se l'estremo superiore è nell'immagine della funzione f, ovvero esiste un $x_M \in A$ tale che $f(x_M) = M$ è detto massimo della funzione. Si indica con max f.

Se l'estremo inferiore è nell'immagine della funzione f, ovvero esiste un $x_m \in A$ tale che $f(x_m) = m$ è detto minimo della funzione. Si indica con min f.

Il valore x_M in cui la funzione raggiunge il suo massimo è detto punto di massimo assoluto. Quindi sia ha che: $\forall x \in A,\ f(x) \leq f(x_M)$.

Il valore x_m in cui la funzione raggiunge il suo minimo è detto punto di minimo assoluto. Quindi sia ha che: $\forall x \in A,\ f(x) \geq f(x_m)$.

Es1. Determinare se la seguente funzione

$$f(x) = |x^2 - x|$$

è limitata (superiormente, inferiormente) trovare gli eventuali estremi superiore e inferiore e il massimo e il minimo, se esistono.

Es2. Come sopra per la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Un punto x_0 del dominio A di una funzione $f(x)$ si dice di massimo locale, o relativo, per la funzione se è di massimo assoluto per la restrizione della funzione ai punti di A che stanno in un intorno di x_0:

$$\exists I(x_0)\ :\ \forall x \in A \cap I(x_0) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

In modo analogo si definisce un punto di minimo locale, o relativo.

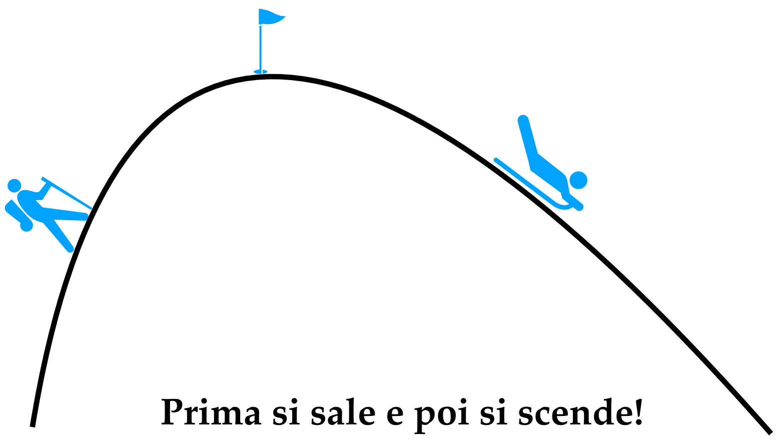
Es3. Calcolare i punti di massimo e di minimo delle funzioni definite dalle seguenti espressioni

1. $f(x) = 3 - (x-2)^2$;
2. $g(x) = \sqrt{x-5} - 100,\ \text{per } x \geq 5.$

Es4. Si dica quali delle seguenti funzioni sono monotone su tutto $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = 1$;
2. $f(x) = |x|$;
3. $f(x) = x^3$;
4. $f(x) = \arctan x$.

Es5. Si determini un intervallo in cui è crescente la funzione $\dfrac{x}{x^2+1}$ e si dimostri tale risultato.



Prima si sale e poi si scende!

Ecco come si presenta il grafico di una funzione che prima cresce e poi decresce. Il punto in cui s'inverte il comportamento della funzione è un **estremo**, in questo caso un **massimo**.