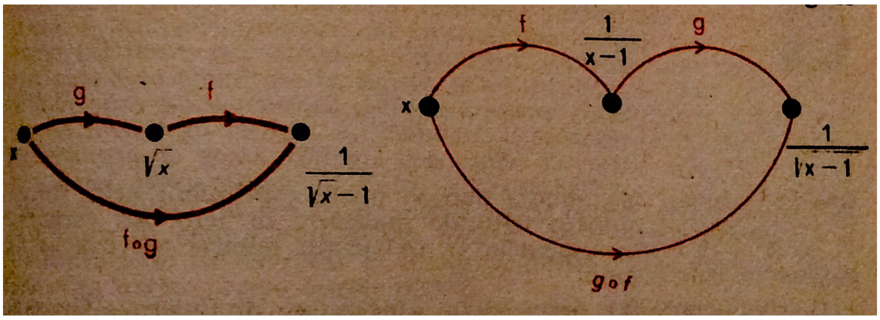
Funzione composta

Chiariamo prima di tutto il concetto di funzione composta:

Data le funzioni $f : A \subseteq X \to Y$ e $g : Y \to Z$ con X, Y e Z tre generici insiemi, non necessariamente numerici, si ha che tramite f ad ogni $x \in A \subseteq X$ corrisponde un unico elemento $f(x) \in Y$, a sua volta a questo elemento corrisponde, tramite la funzione g, l'elemento $g(f(x)) \in Z$. Si ottiene quindi una nuova funzione $h : A \subseteq X \to Z$ che ad ogni $x \in A$ associa l'elemento $g(f(x)) \in Z$. Questa funzione, ottenuta componendo le due funzioni di partenza, si indica con $h = g \circ f$, oppure con $h = g[f]$.

Consideriamo le due funzioni numeriche:

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x}$. La prima funzione ha come dominio $\mathbb{R} /\{1\}$, mentre la seconda è definita in $[0, +\infty[$. Se adesso consideriamo la funzione composta $h = f \circ g$ si ottiene:



$$h(x) = f(g(x) \Rightarrow h(x) = f(\sqrt{x}) \Rightarrow h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

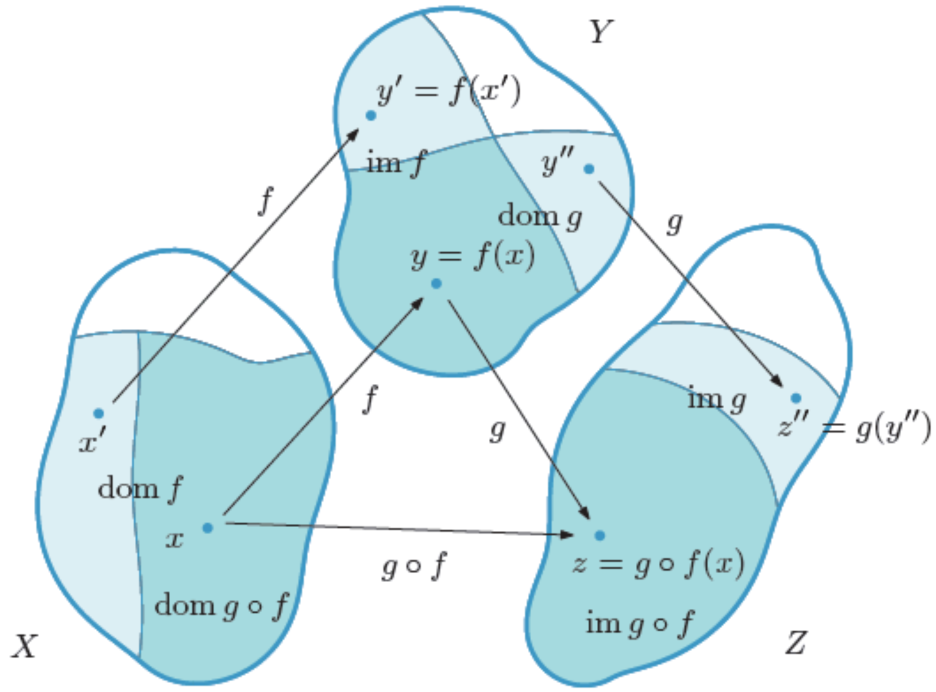
che è definita per $[0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Se invece si considera la funzione $l = g \circ f$ si ottiene:

$$l(x) = g(f(x)) \Rightarrow l(x) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) \Rightarrow l(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

che è definita in $[1; +\infty[$.

Quindi in generale l'ordine è importante quando si considerano le funzioni composte.

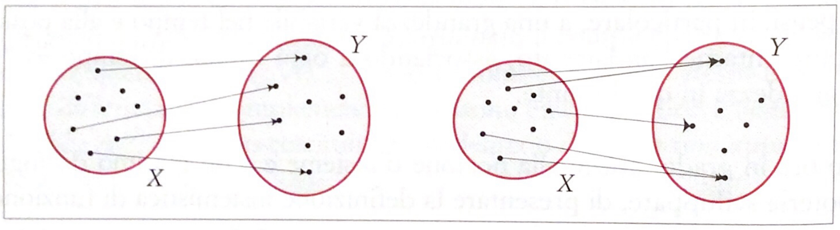


RAPPRESENTAZIONE INSIEMISTICA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Funzione inversa

Per introdurre la funzione inversa di una funzione f dobbiamo assicurarci che tale funzione sia **iniettiva**. Ovvero

Una funzione $f : A \subseteq X \to Y$ si dice **iniettiva** quando elementi *distinti* di A hanno in Y immagini *distinte*, ovvero $\forall x_1, x_2 \in A$, con $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.



A sinistra, un esempio di funzione iniettiva; a destra, una funzione non iniettiva.

Possiamo quindi introdurre la *corrispondenza inversa*, ovvero quella regola che associa agli elementi del codominio Y le loro *controimmagini*, ovvero gli elementi di X da cui quelli provengono.
Il problema è che non sempre la corrispondenza inversa è una funzione, in quanto un elemento di $f(X)$ può avere in X più di una controimmagine.

Ma se la funzione f è *iniettiva* questo non avviene, e quindi la corrispondenza inversa è una funzione, che si dice **funzione inversa,** e si indica con f^{-1}.
Si ha quindi:

Data $f : A \subseteq X \to Y$ una funzione *iniettiva*. Chiamiamo sua **inversa** la funzione, definita su $f(X)$ e a valori in X, che ad ogni $y \in f(X)$ associa la sua *controimmagine*.

Dato che $f(x) = y$ si ha che $x = f^{-1}(y)$.

Importante e utile è considerare cosa si ottiene componendo una funzione con la sua inversa.

$$x = f^{-1}[f(x)]$$

$$y = f[f^{-1}(y)]$$

Dunque la funzione composta mediante f e f^{-1} è la funzione identità, ovvero la funzione che a ogni elemento di un insieme associa l'elemento stesso.

Esercizi.

Es1. Determinare la funzione inversa di

1. $f(x) = 3x + 5$
2. $f(x) = 1 - 2x$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
4. $f(x) = x^3 + 5$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 7$

Es2. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + 1$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Altrimenti determinare il più grande intervallo contenente il punto $x = 1$, tale che la restrizione di f a questo intervallo sia invertibile, e scrivere la funzione inversa.

Es3. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x+1)^2$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Altrimenti determinare il più grande intervallo contenente il punto $x = 0$, tale che la restrizione di f a questo intervallo sia invertibile, e scrivere la funzione inversa.

Es4. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-1)^2$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Altrimenti determinare il più grande intervallo contenente il punto $x = -4$, tale che la restrizione di f a questo intervallo sia invertibile, e scrivere la funzione inversa.

Es5. Disegnare un grafico della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e stabilire se è invertibile nel suo dominio.

Es5. Date le funzioni:

$$f(x) = 3x^2 + 2, g(x) = 1 - 2x,$$

scrivere l'espressione analitica della funzione composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Es 6. Date le funzioni:

$$f(x) = 1 - x^2, \; g(x) = 1 - x,$$

scrivere l'espressione analitica della funzione composte $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$.

Es7. Date le funzioni:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 7, \; g(x) = x^2 - 6x,$$

scrivere l'espressione analitica della funzione composte $f \circ g$, $g \circ f$ e $g \circ g$.

Es8. Date le funzioni

$$f(x) = (x+1)^2, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \pi, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

scrivere l'espressione analitica delle funzioni composte $f \circ f$, $f \circ g$ e $g \circ f$.

Es9. Date le funzioni

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 2 \\ x^2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

scrivere l'espressione analitica delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Es10. Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

scrivere l'espressione analitica delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Es11. Data la funzione $f : A \to B$ provare che questa funzione è **iniettiva** *se e solo se* esiste un'applicazione $\varphi : B \to A$ tale che $\varphi \circ f = i_A$, con i_A la funzione identità che ad ogni elemento $a \in A$ associa lo stesso elemento, ovvero $i_A(a) = a$ per ogni $a \in A$.

Come si scrive l'enunciato:

$$f : A \to B \text{ iniettiva } \iff \exists\, \varphi : B \to A \text{ t.c. } \varphi \circ f = i_A$$

Es12. Data la funzione $g : A \to B$ provare che questa funzione è **suriettiva** *se e solo se* esiste un'applicazione $\psi : B \to A$ tale che $g \circ \psi = i_B$, con i_B la funzione identità che ad ogni elemento $b \in B$ associa lo stesso elemento, ovvero $i_B(b) = b$ per ogni $b \in B$.