# Forza d’interesse
# e scindibilità

Benedetto Matarazzo

# Corso
# di
# Matematica Finanziaria

## Regimi finanziari

- Operazioni finanziarie
- Interesse e Sconto
- Equivalenze finanziarie

- Regime dell'interesse semplice
- Regime dell'interesse composto
- Regime dell'interesse anticipato (sconto commerciale)
- Regimi coniugati

- Principali proprietà di un qualsiasi regime finanziario
- Confronto tra regimi

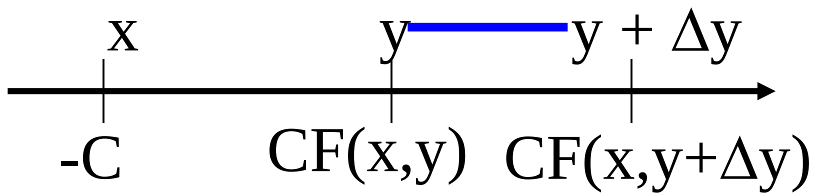
- Tassi effettivi
- Tassi equivalenti
- Tassi nominali
- Tassi istantanei
- Tassi medi
- Forza d'interesse e di sconto

- Scindibilità
- Regimi scindibili
- Scindibilità e forza d'interesse

# Forza d’interesse

## (Legge di capitalizzazione a due variabili F(x, y))

Operazione finanziaria
*in proseguimento* ($x \leq y$ e $\Delta y > 0$):




Interesse prodotto in [y, y+ Δy] da un capitale C investito in x ($x \leq y$):

$$I(x;y,y+\Delta y) = CF(x,y+\Delta y) - CF(x,y)$$

Tasso d’interesse effettivo in [y, y+ Δy] della stessa operazione:

$$i(x;y,y+\Delta y) = \frac{I(x;y,y+\Delta y)}{CF(x,y)} = \frac{F(x,y+\Delta y) - F(x,y)}{F(x,y)}$$

Intensità (*media*) d’interesse in [y, y+ Δy], prodotta da un capitale C investito all’epoca x, secondo la legge F(x, y):

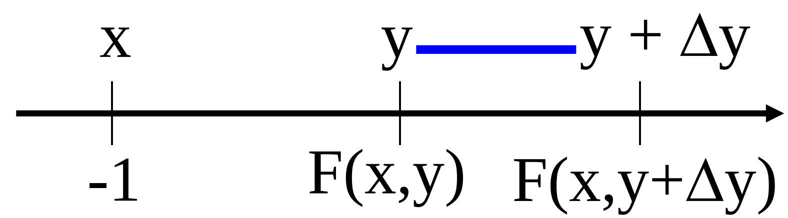
$$\delta(x;y,y+\Delta y) = \frac{i(x;y,y+\Delta y)}{\Delta y} = \underbrace{\frac{F(x,y+\Delta y) - F(x,y)}{F(x,y)\,\Delta y}}_{\text{intensità media d'interesse}}$$

# Forza d’interesse

(Legge di capitalizzazione a due variabili F(x, y))
(continua)

Se F(x,y) è derivabile parzialmente rispetto ad y, si ha:

$$\lim_{\Delta y \to 0^+} \underbrace{\frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{F(x, y)\Delta y}}_{\text{Intensità media d'interesse}} = \frac{F_y(x, y)}{F(x, y)} = \frac{\partial}{\partial y} \log F(x, y) = \delta(x, y)$$




δ(x,y): forza d’interesse o intensità (istantanea) d’interesse in y, (di proseguimento) prodotta dall’investimento di un capitale C all’epoca x, secondo la legge F(x, y), $y \geq x$. Rappresenta la velocità istantanea di accrescimento del capitale accumulato in y rispetto a tale valore.

# Forza d'interesse

(Legge di capitalizzazione a due variabili F(x, y)) (continua)

Incremento del montante (interesse) in [y,y+Δy] prodotto da C(x):

$$F(x,y)C(x)\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{F(x,y)} \cong M(y)\frac{F_y(x,y)}{F(x,y)}\Delta y =$$

$$\boxed{= \underbrace{M(y)}_{\text{montante in y}}\underbrace{\delta(x,y)}_{\text{forza d'interesse}}\underbrace{\Delta y}_{\text{durata}}}$$

Interesse maturato sul capitale C(x) nel periodo [y, y + Δy], a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a Δy, è quindi proporzionale al montante all'inizio del periodo, alla forza di interesse ed all'ampiezza del periodo (legge lineare)

# Forza d'interesse

(Legge di capitalizzazione a due variabili F(x, y)) (continua)

Fattori di capitalizzazione e forza di interesse nei diversi regimi:

Interessi semplici

$$F_s(x,y) = 1 + i(y - x)$$

$$\delta(x,y) = \frac{i}{1 + i(y - x)}$$

(funzione di x ed y, decrescente con y)

composti

$$F_c(x,y) = (1 + i)^{y-x}$$

$$\delta(x,y) = \log(1 + i)$$

(costante rispetto ad x ed y)

anticipati

$$F_{cm}(x,y) = \frac{1+i}{1+i-i(y-x)}$$

$$\delta(x,y) = \frac{i}{1+i-i(y-x)}$$

(funzione di x ed y, crescente con y)

N.B. La forza di interesse corrispondente ai tre regimi qui considerati è invariante rispetto a traslazioni temporali.

# Determinazione della legge di capitalizzazione F(x,y) a partire dalla forza d'interesse

Da $\frac{\partial}{\partial y} \log F(x, y) = \delta(x, y)$, integrando in (x,y) ambo i membri rispetto a y, si ha:

$$\boxed{F(x, y) = e^{\int_x^y \delta(x,s)\, ds}}$$

Legge di capitalizzazione definita dalla forza d'interesse **$\delta(x,s)$, $x \le s \le y$**

Infatti, da $\delta(x, y) = \frac{1}{F(x, y)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \log[F(x, y)]$, $x \le y$

integrando in $[t_0, y]$ rispetto ad y, si ottiene: $(x \le t_0 \le y)$

$$\int_{t_0}^{y} \delta(x, s) ds = [\log F(x, s)]_{t_0}^{y} = \log F(x, y) - \log F(x, t_0) = \log \frac{F(x, y)}{F(x, t_0)};$$

… continua …

# Determinazione della legge di capitalizzazione F(x,y) a partire dalla forza d'interesse

Leggi finanziarie a due variabili

… Continua …

Ponendo $t_0 = x$ e $F(x, x) = 1$ ← [condizione iniziale],
si ottiene:

$$F(x, y) = e^{\int_x^y \delta(x,s)\,ds} \qquad F(x, x) = e^{\int_x^x \delta(x,s)\,ds} \qquad (x \le y)$$

da cui: $$M(x, y) = C\,F(x, y) = C e^{\int_x^y \delta(x,s)\,ds};$$

$$\Phi(y, x) = \frac{1}{F(x, y)} = e^{-\int_x^y \delta(x,s)\,ds}$$ e quindi:

$$(x \le y)$$

$$A(y, x) = S\,\Phi(y, x) = S e^{-\int_x^y \delta(x,s)\,ds}$$

Risulta ancora: $$\Phi(y, x) = e^{-\int_x^y \delta(x,s)\,ds} = e^{\int_y^x \delta(x,s)\,ds} = F(y, x) = \frac{1}{F(x,y)}$$

# Forza d'interesse e di sconto

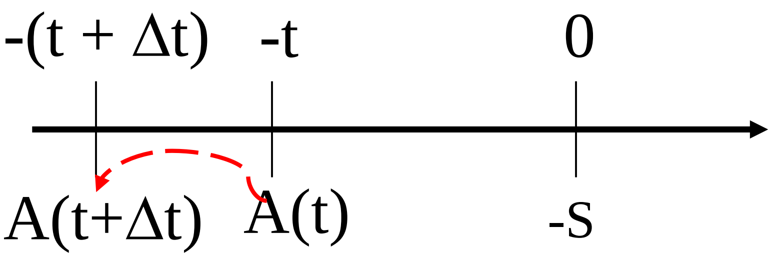
## (Leggi finanziarie uniformi)

Leggi finanziarie ad una variabile: (y-x = t≥0)

$$\lim_{\Delta t \to 0^+}\left[M\left(t+\Delta t\right)-M\left(t\right)\right]=\lim_{\Delta t \to 0^+} C\left[u\left(t+\Delta t\right)-u\left(t\right)\right]=\lim_{\Delta t \to 0^+} M\left(t\right)\frac{u\left(t+\Delta t\right)-u\left(t\right)}{u\left(t\right)}=$$

$$\cong M\left(t\right)\frac{u'\left(t\right)}{u\left(t\right)}\Delta t = M\left(t\right)\delta\left(t\right)\Delta t,$$ se u(t) è derivabile

Simmetricamente, **forza di sconto**;
se v(t) è derivabile:




$$\lim_{\Delta t \to 0^+}\left[A\left(t\right)-A\left(t+\Delta t\right)\right]=\lim_{\Delta t \to 0^+} Sv\left(t\right)\frac{v\left(t\right)-v\left(t+\Delta t\right)}{v\left(t\right)}\cong A\left(t\right)\frac{-v'\left(t\right)}{v\left(t\right)}\Delta t = A\left(t\right)\theta\left(t\right)\Delta t$$

$$\theta\left(t\right)=-\frac{d}{dt}\log\left[v\left(t\right)\right]=-\frac{d}{dt}\log\left[\frac{1}{u\left(t\right)}\right]=\frac{d}{dt}\log\left[u\left(t\right)\right]=\boxed{\delta\left(t\right)}$$ (se u(t)v(t)=1)

# Forza d'interesse

## Legge di capitalizzazione ad una variabile u(t)   (continua)

Fattori di capitalizzazione e forza di interesse nei diversi regimi:

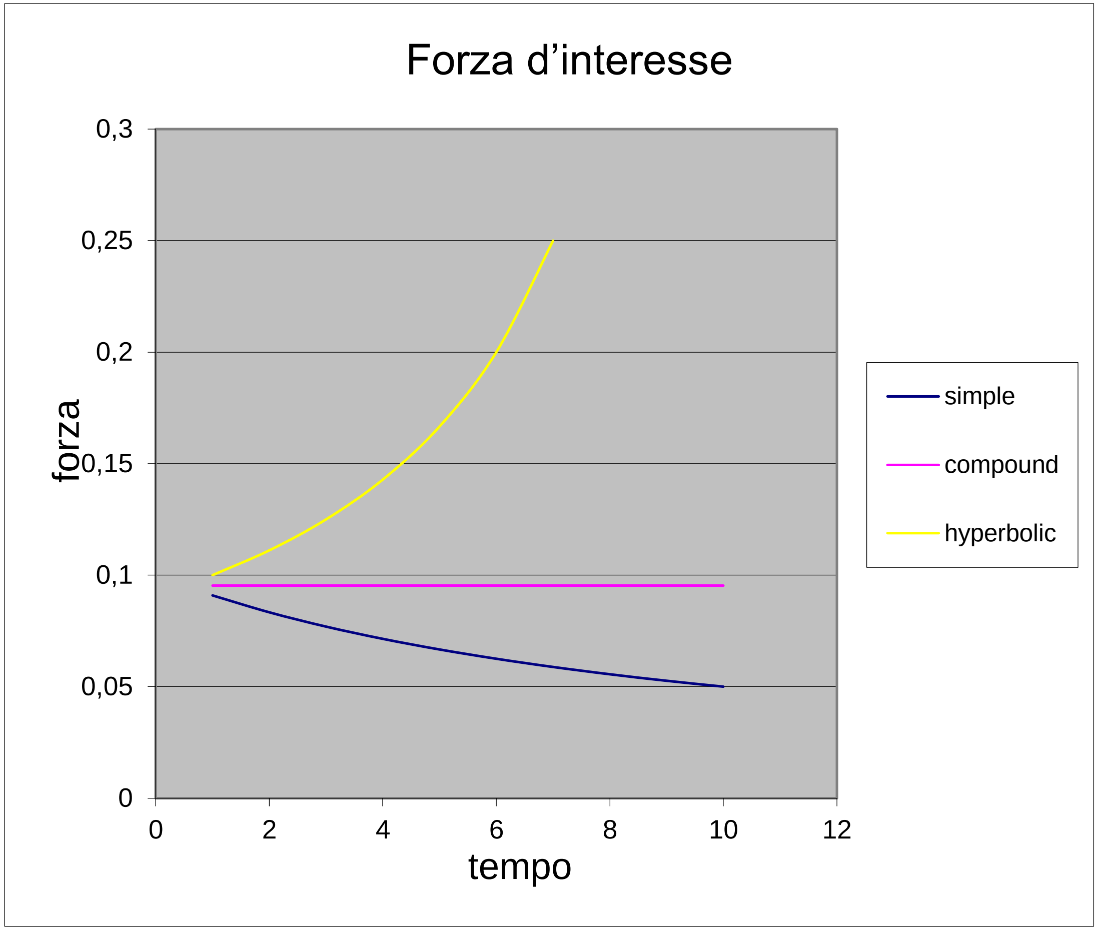
| Interessi semplici | composti | anticipati |
|---|---|---|
| $f_s(t) = 1 + it$ | $f_c(t) = (1+i)^t$ | $f_{cm}(t) = \dfrac{1+i}{1+i-it}$ |
| $\delta(t) = \dfrac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{1+it}}$ | $\delta(t) = \log(1+i)$ | $\delta(t) = \dfrac{i}{1+i-it}$ |
| (decrescente con t) | (costante) | (crescente con t) |

Fattore di attualizzazione e forza di sconto nel regime degli interessi anticipati:

$$\varphi_{cm}(t) = 1 - dt; \qquad \theta_{cm}(t) = \frac{d}{1-dt} = \delta_{cm}(t)$$

# Esempio

| | FORZA DI INTERESSE | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | SEMPLICE | COMPOSTA | IPERBOLICA |
| *i* | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| t (anni) | | | |
| 1 | 0,0909091 | 0,09531018 | 0,1 |
| 2 | 0,0833333 | 0,09531018 | 0,111111111 |
| 3 | 0,0769231 | 0,09531018 | 0,125 |
| 4 | 0,0714286 | 0,09531018 | 0,142857143 |
| 5 | 0,0666667 | 0,09531018 | 0,166666667 |
| 6 | 0,0625 | 0,09531018 | 0,2 |
| 7 | 0,0588235 | 0,09531018 | 0,25 |
| 8 | 0,0555556 | 0,09531018 | |
| 9 | 0,0526316 | 0,09531018 | |
| 10 | 0,05 | 0,09531018 | |
| | | | |



# Forza d'interesse

## Determinazione della legge finanziaria ad una variabile

Da $\frac{d}{dt}\log u(t) = \delta(t)$, integrando ambo i membri in $[t_0,t]$ $(0 \le t_0 \le t)$ e ponendo $t_0=0$ e $u(0)=1$ (condizione iniziale), si ha:

$$\boxed{u(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\,ds}}$$

Legge di capitalizzazione definita dalla forza d'interesse **δ(t), (t≥0)**

Può ricavarsi immediatamente il fattore di sconto coniugato $v(t)=1/u(t)$:

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{u(t)} = e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds}}$$

Legge di attualizzazione definita dalla forza d'interesse **δ(t), (t≥0)**

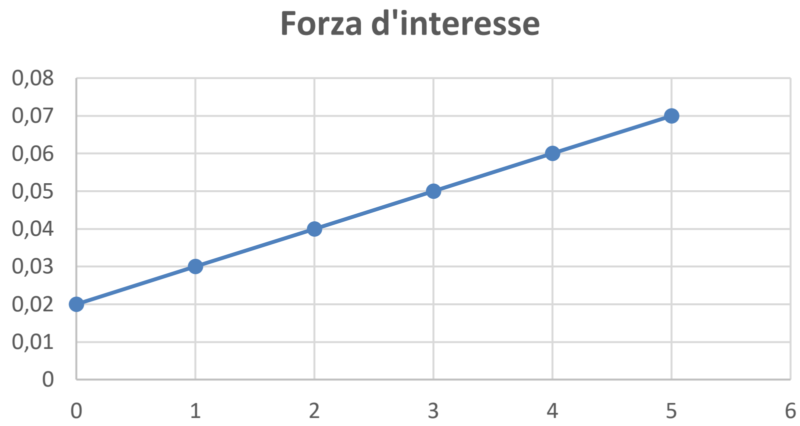
In particolare, se $\delta(t)= \delta$ (costante) $\forall t$, si ha:

$$\boxed{M(t) = C e^{\int_0^t \delta(s)\,ds} = C e^{\delta t}}$$

Regime esponenziale; proprietà caratteristica dell'interesse composto

# Esempio

C = 1.000
$\delta(t) = 0{,}02 + 0{,}01t$
*forza d'interesse*
*crescente linearmente nel tempo*
Durata: 5 anni




Primitiva: $\Delta(t) = 0{,}02t+0{,}01t^2/2$
Integrando: $[0{,}02t+0{,}01t^2/2]_0^5 = 0{,}225$
$f(5) = exp[0{,}02t+0{,}01t^2/2]_0^5 = exp(0{,}225)= 1{,}252323$
$f(5) =e^{0,225} = 1{,}252323$
$M(5) = 1000\ f(5) = 1.000\ e^{0,225} = 1.252{,}32$: montante in capitalizzazione continua con forza d'interesse *variabile con continuità* nel tempo

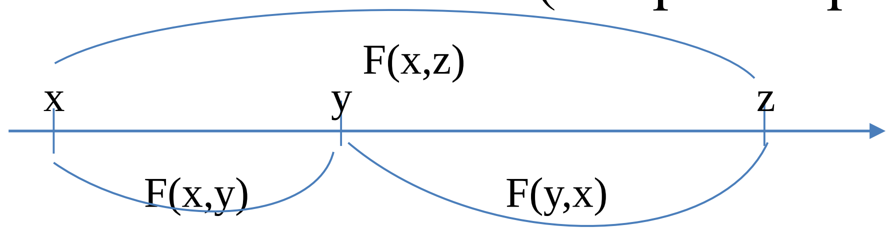
Con forza d'interesse *variabile nel discreto,* ossia costante all'interno di ogni anno:
$1.000\ e^{0,02+0,03+0,04+0,05+0,06}=1000*e^{0,20}=1000*1{,}221403 =1.221{,}40$

# Leggi finanziarie scindibili

Una legge finanziaria di capitalizzazione caratterizzate dal fattore di capitalizzazione F(x,y) si dice debolmente scindibile secondo Cantelli se, comunque prese tre epoche x,y,z ($x<y<z$), risulta:

$$F(x,y)F(y,z)=F(x,z)$$

cioè se il montante non varia in seguito ad interruzione e ad immediata ripresa dell’operazione finanziaria (un qualunque numero di volte).




Se la legge di capitalizzazione F(x,y) è scindibile, è scindibile anche la legge di attualizzazione Φ(x,y) coniugata:

$$\Phi(z,y)\Phi(y,x)=\frac{1}{F(y,z)}\frac{1}{F(x,y)}=\frac{1}{F(x,z)}=\Phi(z,x)$$

La scindibilità debole caratterizza pertanto singole leggi di capitalizzazione o di attualizzazione (“transitività prospettiva” e “transitività retrospettiva”).

# Leggi finanziarie scindibili
(continua)

Scindibilità forte

Si ottiene estendendo le considerazioni precedebti al caso in cui si ammette ogni scelta di ordinamento delle epoche x, y e z

Se si considerano simultaneamente fattori di capitalizzazione e di sconto:

$F(x,z)\Phi(y,x) = F(x,y)F(y,z)\Phi(y,x) = \Phi(y,x)F(x,z) = F(y,z)$

$F(x,z)\Phi(z,y) = F(x,y)F(y,z)\Phi(z,y) = F(x,z)\Phi(z,y) = F(x,y)$

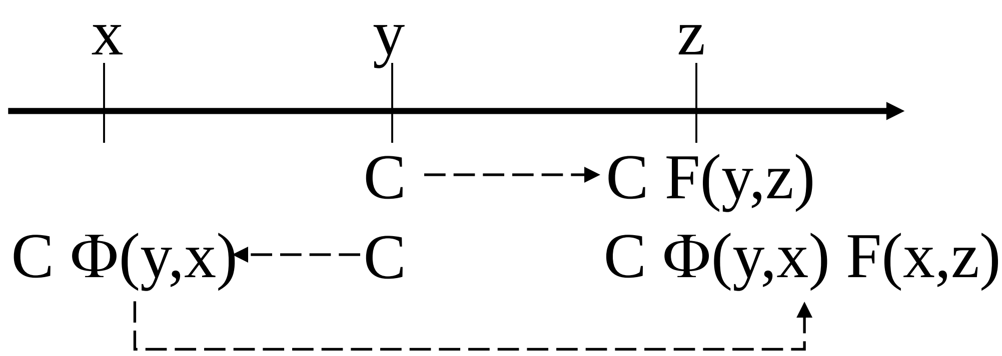
ossia: $L(x,y)L(y,z)=L(x,z), \ \forall x,y,z$ (per qualsiasi legge finanziaria).

Nell'ipotesi di proporzionalità degli importi, una legge di scambio fortemente scindibile dà luogo ad una relazione binaria di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva). Le classi di prestazioni equivalenti (insieme quoziente) costituiscono un insieme totalmente ordinato. Ogni classe è caratterizzata dal valore finanziario intrinseco delle sue prestazioni.

# Leggi finanziarie scindibili

(continua)

Montante di proseguimento e scindibilità debole




(x<y<z)

Montante di investimento

Montante di proseguimento

F(x;y,z)

$$C\,F(y,z) = C\,\Phi(y,x)\,F(x,z) =$$

(senza interruz.) (con interruz.)

$$= \frac{C}{F(x,y)}F(x,z) \Leftrightarrow F(x,z) = F(x,y)\,F(y,z)$$

Una legge di capitalizzazione è (debolmente) scindibile se e solo se F(x;y,z)=F(y;y,z)=F(y,z), ossia se il montante di proseguimento è indipendente dall'epoca di impiego (x).

# Leggi finanziarie scindibili

(continua)

Verifica della scindibilità per i principali regimi finanziari.

Regime dell'interesse semplice: $F(x,y) = 1+(y-x)i$

$$F(x,y)F(y,z) = [1+(y-x)i]\,[1+(z-y)i] = [1+(z-x)i+(y-x)(z-y)i^2] =$$

$$>1+(z-x)i = F(x,z) \qquad \text{("interrompere" conviene)}$$

Regime dello sconto commerciale: $F(x,y) = 1/[1-(y-x)d]$ (in funzione di d)

$$F(x,y)F(y,z) = 1/[1-(y-x)d]\ 1/[1-(z-y)d] = 1/[1-(z-x)d-(y-x)(z-y)d^2] =$$

$$< 1/[1-(z-x)d] = F(x,z) \qquad \text{("interrompere" non conviene)}$$

Regime dell'interesse composto: $F(x,y) = (1+i)^{y-x}$

$$F(x,y)F(y,z) = (1+i)^{y-x}(1+i)^{z-y} = (1+i)^{z-x} = F(x,z)$$

# Forza d'interesse e scindibilità

La forza d'interesse e di sconto caratterizzano le leggi finanziarie scindibili.

Una legge finanziaria a due variabili F(x, y) (o $\Phi(y,x)$) è debolmente scindibile ***se e solo se*** *la forza d'interesse* *$\delta(x,y)$* (o di sconto $\theta(x, y)$) corrispondente dipende al più dalla sola epoca y, ossia è *costante rispetto ad x* (epoca iniziale):

$$\delta(x,y) = \delta(z,y), \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial}{\partial x}\delta(x,y) = 0$$

Infatti, sia F(x, y) scindibile e derivabile parzialmente: $(x \le y \le z)$

$$F(x,y) = F(x,z)F(z,y) \Rightarrow \log[F(x,y)] = \log[F(x,z)] + \log[F(z,y)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\log[F(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}\{\log[F(x,z)] + \log[F(z,y)]\}, \text{ ossia:}$$

$$\delta(x,y) = \delta(z,y).$$

# Forza d'interesse e scindibilità

Viceversa, sia $\delta(x,y)=\delta(z,y), \qquad \forall\, x \le y \le z;$

$$F(x,y)=e^{\int_x^y \delta(x,s)\,ds} = e^{\int_x^z \delta(x,s)\,ds+\int_z^y \delta(z,s)\,ds} =$$

$$= e^{\int_x^z \delta(x,s)\,ds}\, e^{\int_z^y \delta(z,s)\,ds} = F(x,z)\,F(z,y).$$

Osservazione:

Se ancora la forza di interesse coincide con quella di sconto, la legge finanziaria L(x,y) risulta fortemente scindibile. Si ha pertanto:

$$L(x,y)=e^{\int_x^y \delta(s)\,ds}, \qquad \forall\, x,y.$$

# Forza d'interesse e scindibilità

Per leggi di capitalizzazione uniformi ad una sola variabile (y-x = t > 0), la condizione di scindibilità è:

$$u(t+s) = u(t)u(s), \qquad \forall\, t, s > 0.$$

Ricordando che le uniche soluzioni dell'equazione funzionale di Cauchy f(x+y)=f(x)+f(y) sono date da f(x)=cx (c costante), considerando l'equaz. funzionale u(t+s)=u(t)u(s), da cui log[u(t+s)]=log[u(t)]+log[u(s)] , si ha che le uniche sue soluzioni sono date da $u(t) = e^{ct}$, (c>0).
Se u(0)=1, u(t) è **crescente (**i>0**) e scindibile**, allora $u(t) = k^t$, k = f(1) > 1; ossia c= log(1+i)=δ, da cui $u(t)=e^{\delta\tau}$.
Pertanto, si ha **scindibilità** solo nel regime dell'interesse composto (legge esponenziale). In tal caso, condizione necessaria e sufficiente è che δ(t) sia costante.
Poiché risulta anche δ=θ, la legge finanziaria del regime dell'interesse composto risulta fortemente scindibile con fattore di scambio uguale a $l(t)=e^{\delta\tau}$ per ogni t (positivo o negativo).

# Forza d’interesse e scindibilità

Conclusioni

Dall’analisi della forza d’interesse si possono evidenziare le seguenti proprietà caratteristiche di un regime finanziario: **scindibilità e uniformità,** ossia **invarianza** rispetto alle **traslazioni temporali** dell’epoca iniziale e di quella finale (cioè funzioni della sola durata).

1) Se e solo se la forza d’interesse o di sconto non dipende dall’epoca iniziale (x), ovvero se il montante di proseguimento non dipende dall’epoca d’impiego, il corrispondente regime è debolmente scindibile;
2) Un regime finanziario caratterizzato da fattori di capitalizzazione e di attualizzazione coniugati è fortemente scindibile se e solo se la forza di sconto risulta uguale alla forza di interesse;
3) Se la forza d’interesse è invariante rispetto alle traslazioni temporali, il regime è anch’esso invariante (ossia uniforme o traslabile);
4) Un regime è uniforme e scindibile se e solo se la corrispondente forza di interesse è costante.

continua...

# Forza d’interesse e scindibilità

| | Interesse semplice | Interesse composto | Sconto commerciale |
|---|---|---|---|
| Scindibilità | no | si | no |
| Uniformità | si | si | si |

Nel regime di capitalizzazione a interessi semplici, il montante con interruzione e prosecuzione è maggiore del montante non interrotto. Nel regime di capitalizzazione a interessi anticipati, il montante con interruzione e prosecuzione è minore del montante non interrotto. L’unico regime (uniforme) e scindibile è quello esponenziale.

N.B.: Nel regime di capitalizzazione mista, non si ha invarianza rispetto a traslazioni temporali dell’epoca iniziale e di quella finale (senza una corrispondente traslazione di quelle di capitalizzazione).

# Conseguenza operativa particolarmente utile

Se due prestazioni $(C_1,t_1)$ e $(C_2,t_2)$ sono equivalenti, allora entrambe saranno equivalenti alla prestazione $(C_3,t_3)$ in qualunque epoca $t_3$ [anche se $t_3<t_2$], purché essa sia calcolata in base ad un regime finanziario [fortemente] scindibile:

$$(C_1,t_1) \approx (C_2,t_2) \Rightarrow (C_1F(t_1,t_3),t_3) \approx (C_2F(t_2,t_3),t_3), \text{ per qualunque epoca } t_3.$$

Infatti, $(C_1F(t_1,t_3),t_3) = (C_3,t_3)$ e $(C_2F(t_2,t_3),t_3) = (C_3,t_3)$, e anche $C_2 = C_1F(t_1,t_2)$;

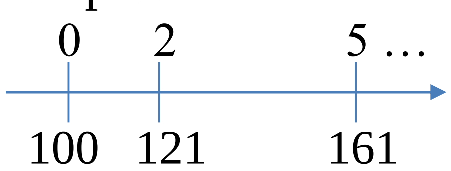
Per la proprietà transitiva e sostituendo $C_2$ si ha quindi:

$(C_3,t_3) = (C_1F(t_1,t_3),t_3) = (C_2F(t_2,t_3),t_3) = (C_1F(t_1,t_2)F(t_2,t_3),t_3)$,

vera se e solo se $F(t_1,t_3) = F(t_1,t_2)\,F(t_2,t_3)$, ossia se il fattore F proviene da un regime finanziario [fortemente] scindibile.

Operativamente, due prestazioni equivalenti in epoche diverse, saranno ancora equivalenti ad una stessa prestazione (valore finanziario intrinseco) in una qualunque altra epoca, se ivi valutate adoperando un regime scindibile.

Esempio:




Nel regime composto:

$i = 0{,}10$, $F(0,2) = (1+0{,}10)^2 = 1{,}21$; $F(2,5) = (1+0{,}10)^3 = 1{,}331$;

$F(0,5) = (1+0{,}10)^5 = 1{,}610 = 1{,}21 * 1{,}331$

$(100,0) \approx (121,2) \Rightarrow (100,0) \approx (121,2) \approx (161,5)$;

Ancora: $F(0,12) = (1+0{,}10)^{12} = 3{,}138$ e quindi

$(100,0) \approx (121,2) \Rightarrow (100,0) \approx (121,2) \approx (313.8,\ 12)$ …