Rendite Certe: definizioni preliminari e valutazione

Benedetto Matarazzo

Corso di Matematica Finanziaria

Rendite certe

- Definizioni preliminari
- Rendite Discrete
  - Rendite Continue
  - Rendite Temporanee
  - Rendite Perpetue
  - Rendite Differite
  - Rendite Intere
  - Rendite Frazionate
  - Rendite a Rate Costanti
  - Rendite a Rate Variabili
  - Rendite a Tassi Variabili
- Problemi relativi alle rendite

Rendite Certe

Rendita certa: una sequenza di somme di denaro (dello stesso segno) scadenti in epoche diverse e non subordinate al verificarsi di qualsiasi evento**.**

I parametri che definiscono una rendita, assegnata una certa **legge finanziaria**, sono:

- L'**importo** di ciascun versamento (**termine** o **rata**);
- Il **numero** delle rate, o **durata**;
- La **scadenza** (epoca di pagamento) di ciascuna rata;
- Il **tasso d'interesse** (o di sconto) di valutazione;
- La **decorrenza**, cioè l'epoca di inizio della competenza;
- La **fine**, ossia l'epoca finale della competenza;
- La **durata**, ossia l'ampiezza dell'intervallo di tempo tra la decorrenza e la fine

Continua...

Rendite Certe

Una rendita si dice **periodica** se le scadenze delle rate sono equidistanti; il tempo che intercorre tra due scadenze successive dicesi **periodo.**
Esso può essere l'anno o una frazione di anno: si parla allora di rendite annue (o annualità) o di rendite frazionate (mensili, semestrali).
La **frequenza** è il reciproco del periodo, ossia il numero di pagamenti in un anno. Se la frequenza tende ad infinito, si ha una rendita **continua**.
Una rendita si dice **temporanea** se ha un numero finito di termini, **perpetua,** se ha infiniti termini.
Una rendita si dice **posticipata** oppure **anticipata**, secondo che i versamenti avvengono alla fine o all'inizio di ciascun periodo.
Una rendita si dice **immediata** se la sua decorrenza coincide con l'epoca di **valutazione iniziale, differita** in caso contrario; il tempo intercorrente tra l'epoca di valutazione iniziale e la decorrenza dicesi **periodo di differimento.**

Continua...

Rendite Certe: valutazione

La valutazione consiste nel riportare finanziariamente **tutte le rate** ad una **scadenza comune** (epoca di valutazione), calcolando di ciascuna di esse l'importo monetario equivalente, valutato ad un tasso opportuno, e quindi sommando tali importi (principio di additività).

Si ottiene allora una prestazione (C_t,t) finanziariamente equivalente alla rendita, ossia un unico capitale C_t valutato ad una scadenza opportuna t.

L'omogeneità dei dati consente spesso di ottenere **espressioni compatte**, funzioni del numero delle rate e del valore del tasso d'interesse.

Nella pratica, si adottano le leggi finanziarie dell'*interesse* e *sconto composto*, scindibili e invarianti per traslazioni temporali.

Possono calcolarsi:

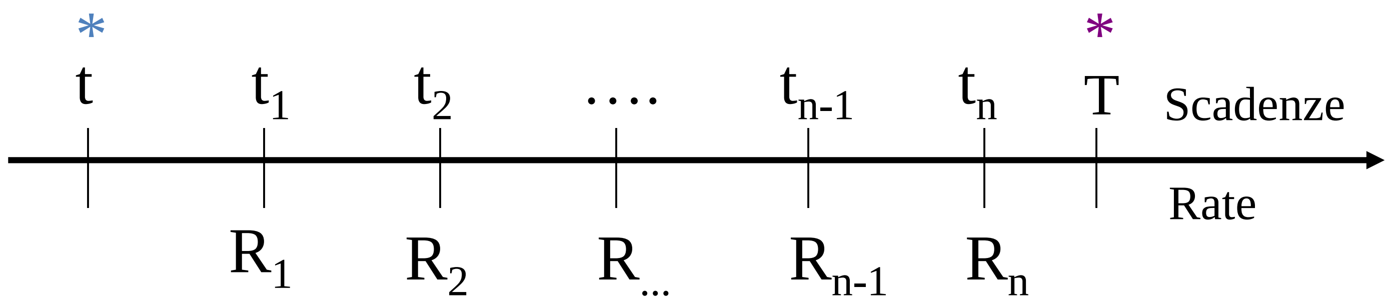
a) Il **valore attuale** ad una qualsiasi epoca di valutazione non posteriore alla decorrenza;

b) il **montante** ad una qualsiasi epoca di valutazione non anteriore alla fine;

c) il valore ad un'**epoca intermedia**, compresa tra la decorrenza e la fine della rendita.

Rendite Certe: valutazione

<u>Caso generale *(poco interessante).*</u>



Valore attuale ad una scadenza t ($t \le t_1$)

$$A(t) = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i_s)^{-(t_s - t)} = \sum_{s=1}^{n} R_s v_s^{\,t_s - t}$$

i_s: tasso vigente nell'intero periodo (t, t_s), (t_s, T) espresso nella stessa unità di misura del tempo

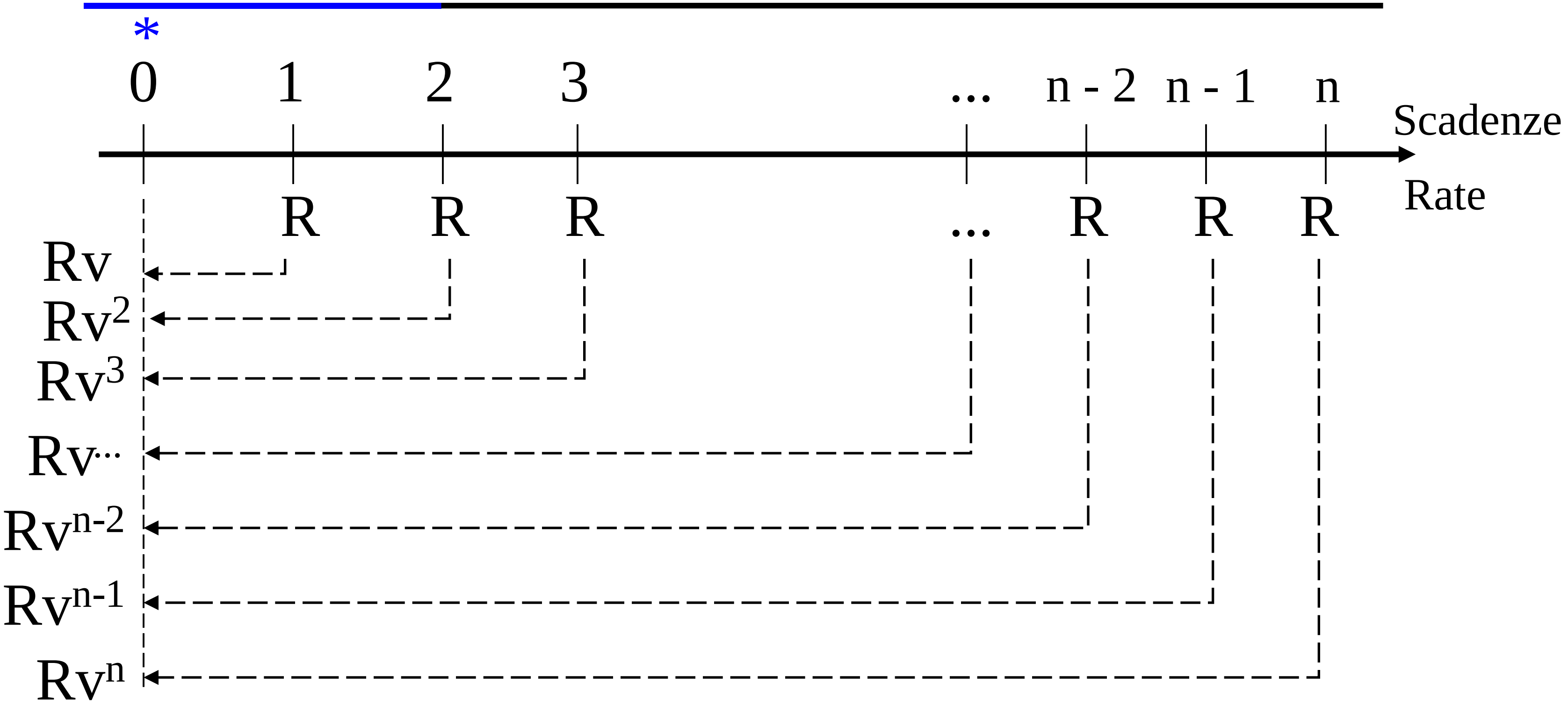
Montante ad una scadenza T ($T \ge t_n$)

$$M(T) = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i_s)^{(T - t_s)} = \sum_{s=1}^{n} R_s u_s^{\,T - t_s}$$

Rendite Certe: valutazione

Si considerano i valori calcolati ad un tasso di interesse *i* costante

Valore attuale di una rendita annua a rata costante



$R\, a_{\overline{n|}\, i}$

(immediata, posticipata, temporanea)

Continua...

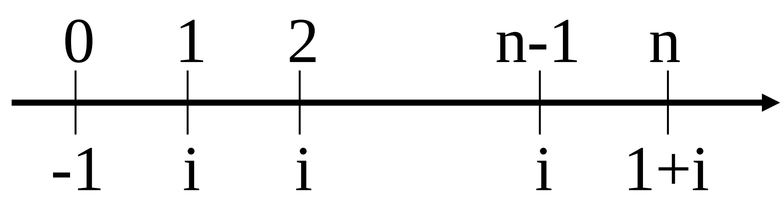
Rendite Certe: valutazione

…continua...

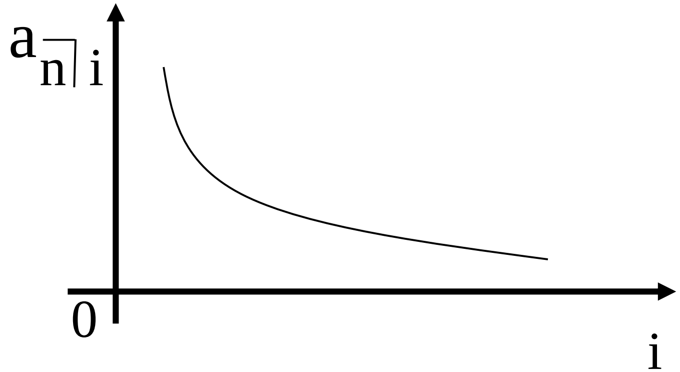
$$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + \ldots + v^h + \ldots + v^{n-1} + v^n = v\,\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{i} =$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (i \neq 0) \qquad \text{(Per i = 0,} \quad a_{\overline{n}|0} = n)$$

Interpretazione:



$$1 = i\, a_{\overline{n}|i} + v^n$$



…continua...

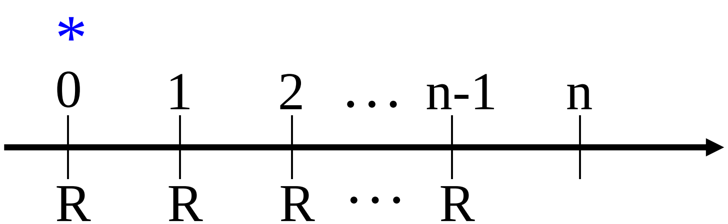
Rendite Certe: valutazione

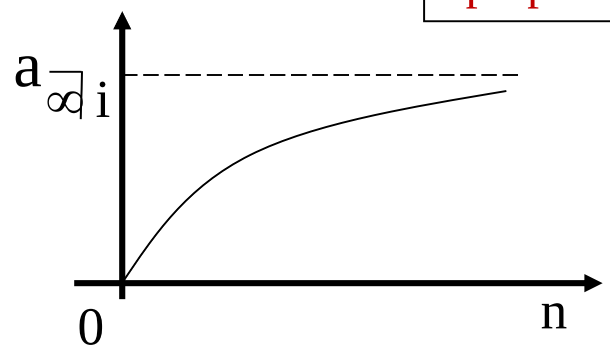
…continua...

Se il numero delle rate è grande ad arbitrio, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} R\, a_{\overline{n}|i} = \lim_{n \to +\infty} R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{R} a_{\overline{\infty}|i}$$

Immediata
posticipata
perpetua





(immediata, anticipata, temporanea)

$$R + Rv + Rv^{2} + \ldots + Rv^{n-1} = R \cdot 1 \frac{1-v^{n}}{1-v} = R(1+i)\frac{1-v^{n}}{i} = R\frac{1-(1-d)^{n}}{d} = \boldsymbol{R}\,\ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

…continua...

Rendite Certe: valutazione

…continua...

Risultano: $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$; $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)$

0	1	2	3		n-1	n
	1	1	1	…	1	(1)
1	1	1	…	1	1	

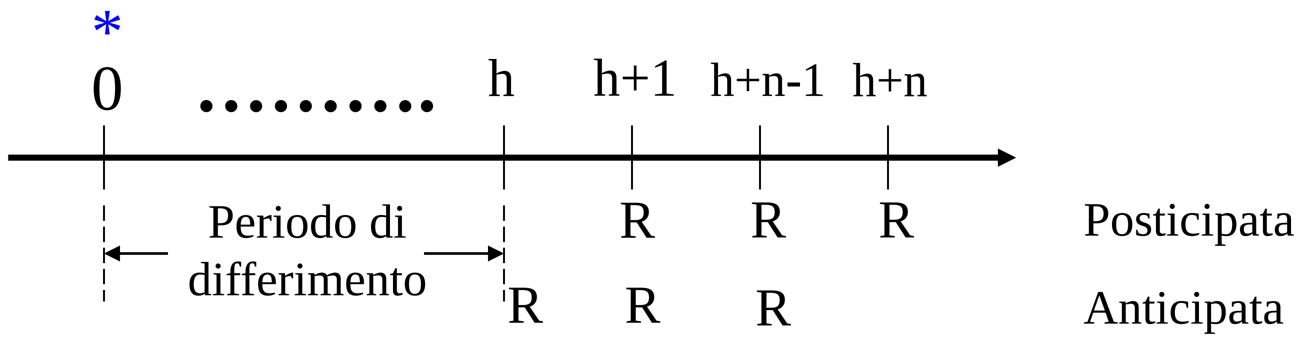
$$\lim_{n \to +\infty} R\, \ddot{a}_{\overline{n}|i} = R\left[1 + \lim_{n \to +\infty} a_{\overline{n}|i}\right] = R\left(1 + \frac{1}{i}\right) = R\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$$

(immediata, anticipata, perpetua)

…continua…

Rendite Certe: valutazione

…continua...



(Differita, posticipata, temporanea): $R\ {}_{h/}a_{\overline{n}|i}$

(Differita, anticipata, temporanea): $R\ {}_{h/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

$${}_{h/}a_{\overline{n}|i} = v^{h+1} + v^{h+2} + \dots + v^{h+n} = v^{h} a_{\overline{n}|i}$$ (scindibilità)

$${}_{h/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{h+n}|i} - a_{\overline{h}|i}$$ (per completamento) $\Leftarrow \quad a_{\overline{h+n}|i} = a_{\overline{h}|i} + v^{h} a_{\overline{n}|i}$

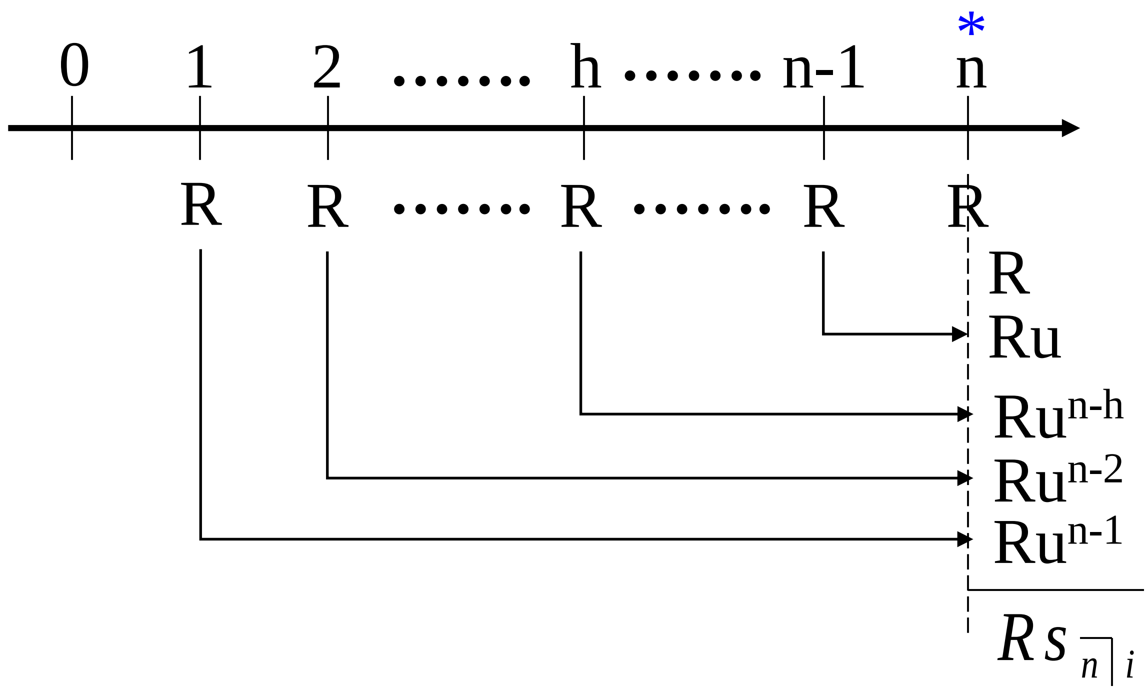
$${}_{h/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^{h} + v^{h+1} + \dots + v^{h+n-1} = v^{h}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^{h}\left(a_{\overline{n-1}|i} + 1\right) =$$

$$= v^{h-1} a_{\overline{n}|i}$$

(scindibilità)

Rendite Certe: valutazione

Montante di una rendita annua a rata costante



posticipata

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + u + \dots + u^{n-1} = \frac{u^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (i \neq 0)$$

(Per i = 0, $s_{\overline{n}|0} = n$)

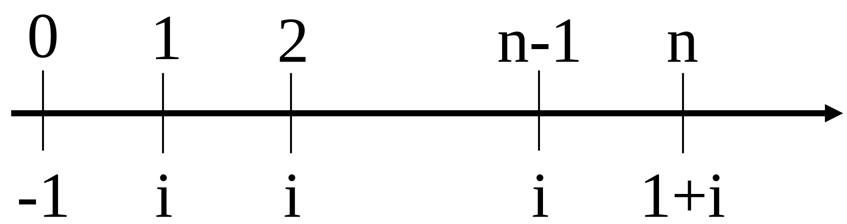
…continua…

Rendite Certe: valutazione

Montante di una rendita annua a rata costante

Interpretazione:

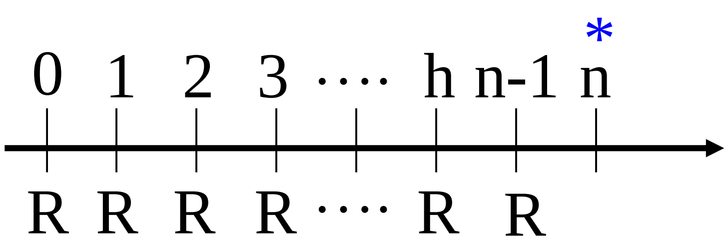
$$i\, s_{\overline{n}|\,i} + 1 = (1+i)^n \,;$$



Risultano:

$$s_{\overline{n}|\,i} = a_{\overline{n}|\,i}(1+i)^n \,; \qquad a_{\overline{n}|\,i} = s_{\overline{n}|\,i}(1+i)^{-n}$$

(scindibilità)



anticipata

$$R u^n + R u^{n-1} + \ldots + R u = Ru\frac{u^n - 1}{u - 1} =$$

$$= R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R\ddot{s}_{\overline{n}|\,i}$$

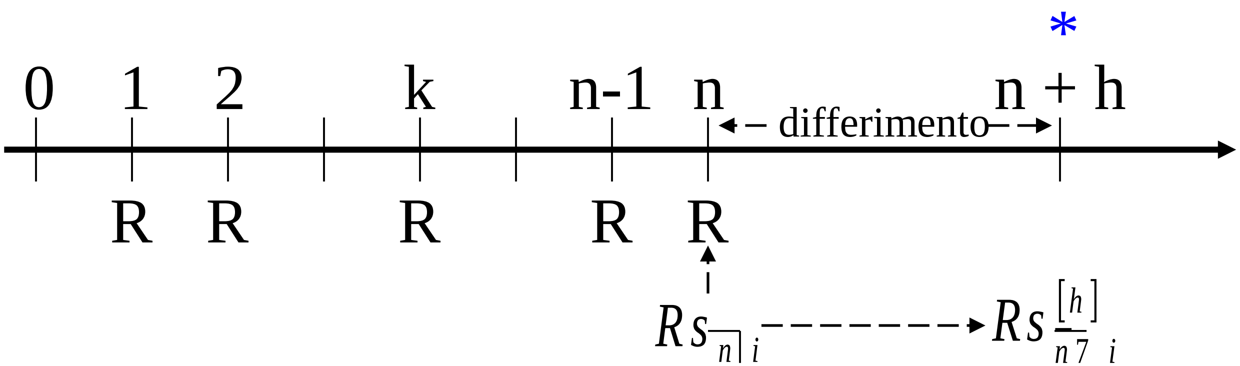
…continua…

Rendite Certe: valutazione

Montante di una rendita annua a rata costante …continua…

Risultano:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}\,i} = s_{\overline{n|}\,i}(1+i)\,; \qquad \ddot{s}_{\overline{n|}\,i} = s_{\overline{n+1|}\,i} - 1$$ (anticipata)



(posticipata, con valutazione differita di h periodi)

$$s^{[h]}_{\overline{n|}\,i} = s_{\overline{n|}\,i}(1+i)^h\,; \qquad s^{[h]}_{\overline{n|}\,i} = s_{\overline{n+h|}\,i} - s_{\overline{h|}\,i}\,;$$

(scindibilità) (per completamento)

… continua…

Rendite Certe: valutazione

Oppure, se anticipata (con valutazione differita di h periodi):

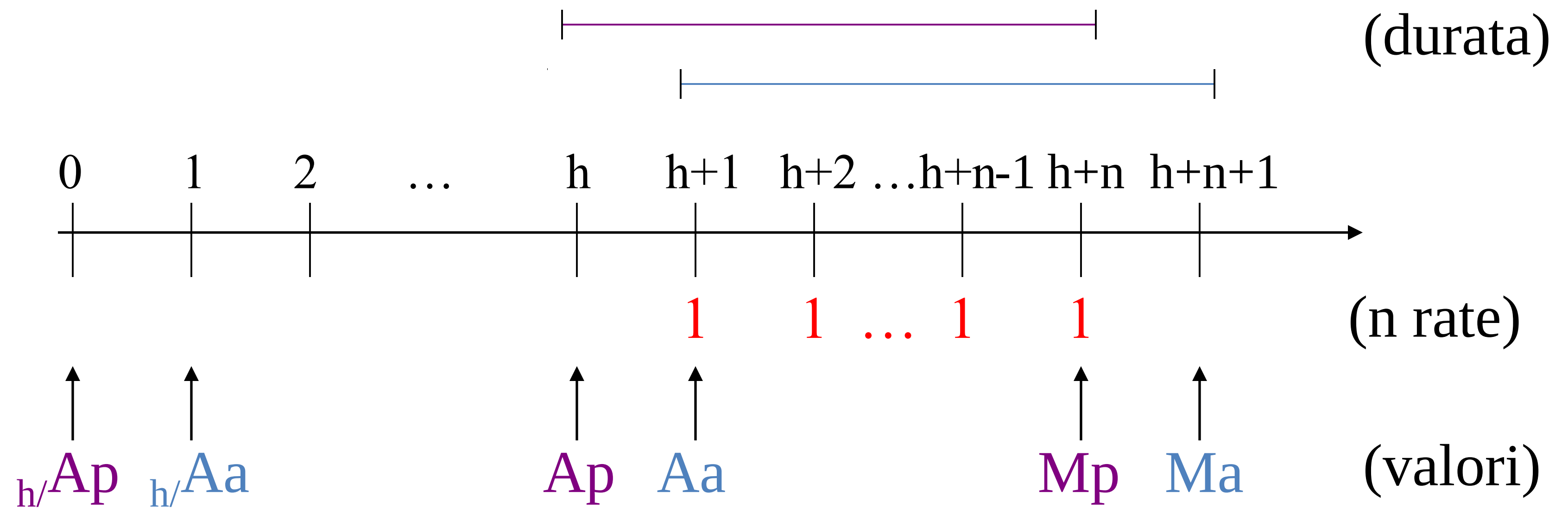
$$\ddot{s}^{[h]}_{\overline{n|}\,i} = \ddot{s}_{\overline{n|}\,i}(1+i)^h = (s_{\overline{n+1|}\,i} - 1)(1+i)^h =$$

$$= s_{\overline{n|}\,i}(1+i)^{h+1};$$ (scindibilità)

$$\ddot{s}^{[h]}_{\overline{n|}\,i} = \ddot{s}_{\overline{n+h|}\,i} - \ddot{s}_{\overline{h|}\,i}\,.$$ (per completamento)

Rendite Certe: valutazione

Epoche e simboli di valutazione di valori attuali e montanti:



$_{h/}a_{\overline{n}|i}$ $\quad$ $_{h/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ $\quad$ $_{\overline{n}|\,i}$ $\quad$ $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ $\quad$ $s_{\overline{n}|i}$ $\quad$ $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ (simboli)

$_{h/}a_{\overline{n}|i} = {}_{\overline{n}|\,i}\,v^{h} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}\,v^{h+1} = s_{\overline{n}|i}\,v^{h+n} = \ddot{s}_{\overline{n}|i}\,v^{h+n+1}$ (relazioni)

Rendite Certe: relazioni

Si pone, per definizione (problemi inversi):

$$\alpha_{\overline{n|}i} = \frac{1}{a_{\overline{n|}i}}$$

Annualità posticipata per costituire dopo n versamenti il capitale $(1+i)^n$, oppure per estinguere dopo n versamenti un debito unitario

$$\sigma_{\overline{n|}i} = \frac{1}{s_{\overline{n|}i}}$$

Annualità posticipata per costituire dopo n versamenti il capitale unitario

Rendite Certe: relazioni

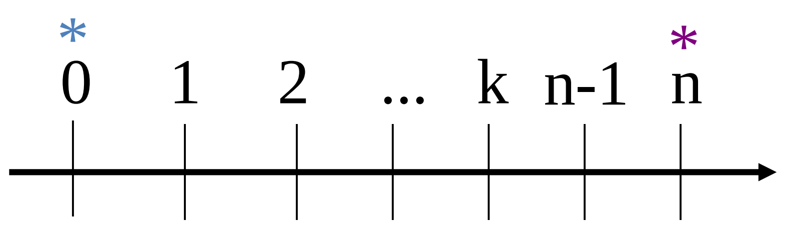
…continua…

Infatti:

1) $\alpha_{\overline{n}|i}\; s_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i}\; a_{\overline{n}|i}(1+i)^{n} = (1+i)^{n};$

2) $\alpha_{\overline{n}|i}\; a_{\overline{n}|i} = 1$

3) $\sigma_{\overline{n}|i}\; s_{\overline{n}|i} = 1$



1) $\alpha_{\overline{n}|i}\;\alpha_{\overline{n}|i}\;\cdots\;\alpha_{\overline{n}|i}\;\alpha_{\overline{n}|i}\;\alpha_{\overline{n}|i}$

2) $1 \longleftarrow \qquad \longrightarrow (1+i)^{n}$

3) $\sigma_{n\,i}\;\sigma_{n\,i}\qquad\sigma_{n\,i}\;\sigma_{n\,i}\;\sigma_{n\,i}$

$\longrightarrow 1$

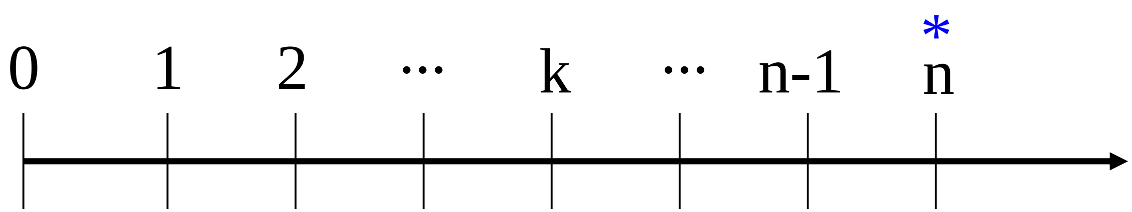
Rendite Certe: relazioni

Si ha ancora:

$$(1+i)^n - 1 = i\, s_{\overline{n|}i}$$

$$\alpha_{\overline{n|}i} \cdot \sigma_{\overline{n|}i} = i$$

$$\alpha_{\overline{n|}i}\, s_{\overline{n|}i} - \sigma_{\overline{n|}i}\, s_{\overline{n|}i} = \left(\alpha_{\overline{n|}i} - \sigma_{\overline{n|}i}\right) s_{\overline{n|}i}$$



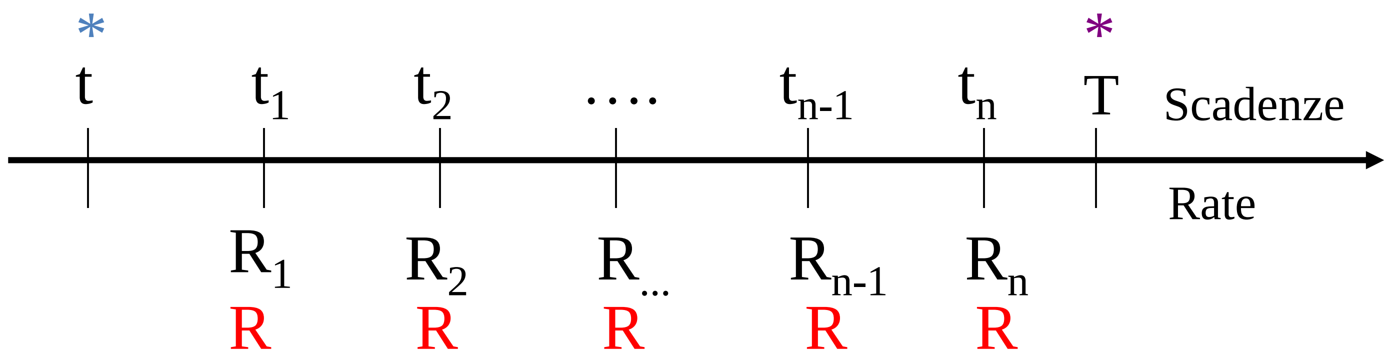
0	1	2	…	k	…	n-1	n	
1	$\alpha_{\overline{n|}i}$	$\alpha_{\overline{n|}i}$	…	$\alpha_{\overline{n|}i}$	…	$\alpha_{\overline{n|}i}$	$\alpha_{\overline{n|}i}$	(1)
	$\sigma_{\overline{n|}i}$	$\sigma_{\overline{n|}i}$	…	$\sigma_{\overline{n|}i}$	…	$\sigma_{\overline{n|}i}$	$\sigma_{\overline{n|}i}$	(2)
	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$ 1	
	i	i	…	i	…	i	i	(1)-(2)

$\rightarrow (1+i)^n - 1$

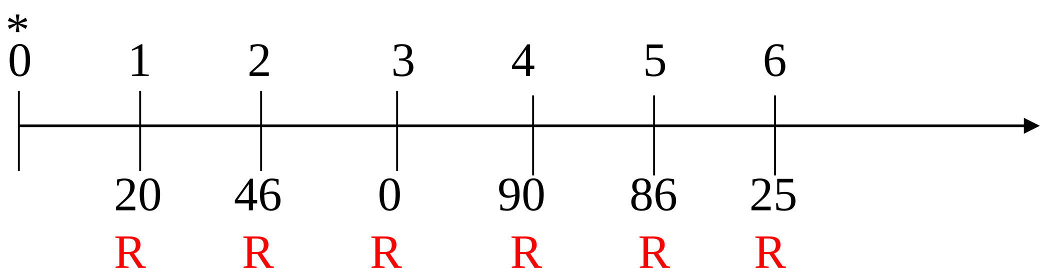
ovvero, per ammortizzare un capitale unitario (1) si versano n rate di costituzione di tale capitale (2) più l'interesse periodale (i)

Valore medio finanziario

Data una distribuzione di n rate di importo R_i, i = 1,2,…n, il suo valor medio finanziario è quella rata R di importo costante che, sostituita alle n rate, ne lascia invariato il valore finanziario calcolato con un certo regime ad una certa scadenza



Nel regime composto (scindibile), se due operazioni sono finanziariamente equivalenti ad un'epoca t, saranno anche equivalenti ad un'altra epoca T arbitraria. Può pertanto scegliersi una qualunque epoca di valutazione, ad esempio t = 0.



Tasso di valutazione i;
Valore medio finanziario R
che soddisfa l'equivalenza:

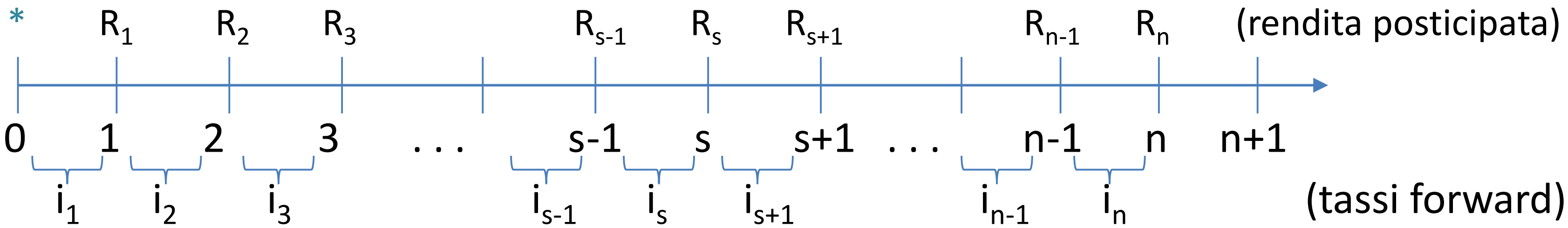
$R a_{\overline{n}|i} = A_p(X)$, cioè:

$$\sum_{k=1}^{6} R\,(1+i)^{-k} = 20(1+i)^{-1} + 46(1+i)^{-2} + \ldots + 25(1+i)^{-6}$$

Esempio:→ R=43,316 per i = 0,06

Rendite a rate e tassi variabili

Se sono assegnati gli importi R_s e i tassi periodali i_s per *n* periodi unitari (tassi forward), una rendita può essere valutata ad ogni epoca utilizzando la struttura per scadenze intere dei tassi e quelle corrispondenti dei fattori di attualizzazione e di capitalizzazione.



Valore attuale posticipato:

$$V_p(0) = R_1(1+ i_1)^{-1}+ R_2(1+ i_1)^{-1}(1+ i_2)^{-1}+ R_3(1+ i_1)^{-1}(1+ i_2)^{-1} (1+ i_3)^{-1} + \ldots + R_s(1+ i_1)^{-1}(1+ i_2)^{-1} \cdots (1+ i_s)^{-1} + +\ldots +R_n(1+ i_1)^{-1}(1+ i_2)^{-1} \cdots (1+ i_s)^{-1} \cdots (1+ i_n)^{-1};$$

Valore attuale anticipato (traslando le rate di un periodo indietro):

$$V_a(0) = R_1+R_2(1+ i_2)^{-1}+R_3(1+ i_2)^{-1} (1+ i_3)^{-1}+ \ldots +R_s(1+ i_2)^{-1} (1+ i_3)^{-1}\cdots(1+ i_s)^{-1}+R_{s+1}(1+ i_2)^{-1} (1+ i_3)^{-1} \cdots \cdots(1+ i_s)^{-1}(1+i_{s+1})^{-1}+\cdots+R_n(1+ i_2)^{-1}(1+ i_3)^{-2}\cdots(1+ i_s)^{-1}(1+ i_{s+1})^{-1} \cdots (1+ i_n)^{-1} = V_p(0)(1+i_1);$$

Montante posticipato:

$$V_p(n) = R_1(1+ i_2) (1+ i_3)\cdots(1+ i_s)(1+ i_{s+1})\cdots (1+ i_n)+ R_2(1+ i_3)\cdots(1+ i_s)(1+ i_{s+1})\cdots (1+ i_n)+ \cdots +R_s(1+ i_{s+1}) \cdots \cdots(1+ i_n)+R_{n-1}(1+i_n)+R_n;$$

Montante anticipato (traslando le rate di un periodo indietro):

$$V_a(n) = R_1(1+ i_1)(1+ i_2)+\ldots+(1+ i_{s-1})(1+ i_s)\cdots (1+ i_{n-1})(1+ i_n) + R_2(1+ i_2)\cdots(1+ i_{s-1})(1+ i_s)\cdots(1+ i_{n-1})(1+ i_n)+ \cdots + R_s(1+ i_s)\cdots (1+ i_{n-1})(1+ i_n)+R_{n-1}(1+i_{n-1})(1+ i_n)+R_n(1+ i_n)= V_p(n)(1+ i_1).$$

Rendite a rate e tassi variabili - Esempi

	Valore attuale posticipato						Valore attuale anticipato			
Periodo	Rata	Tasso forward	Fatt. sconto	Val. att.		Periodo	Rata	Tasso forward	Fatt. sconto	Val. att.
0	0	0,04	1			0	150	0,04	1,0000	150,0000
1	150	0,045	0,9615	144,2308		1	110	0,045	0,9569	105,2632
2	110	0,038	0,9201	101,2146		2	80	0,038	0,9219	73,7524
3	80	0,03	0,8864	70,9158		3	95	0,03	0,8951	85,0301
4	95	0,05	0,8606	81,7597		4	108	0,05	0,8524	92,0627
5	108		0,8196	88,5218		5				
				486,6427	*	1,04		=		506,1084
					(se stesse rate e tassi)					

		Montante posticipato						Montante anticipato		
Periodo	Rata	Tasso forward	Fatt. capit.	Montante		Periodo	Rata	Tasso forward	Fatt. capit.	Montante
0	0	0,04	1,2200			0	150	0,04		
1	150	0,045	1,1731	175,9671		1	110	0,045	1,2200	183,0058
2	110	0,038	1,1226	123,4857		2	80	0,038	1,1731	129,0425
3	80	0,03	1,0815	86,5200		3	95	0,03	1,1226	89,8078
4	95	0,05	1,0500	99,7500		4	108	0,05	1,0815	102,7425
5	108		1,0000	108,0000		5			1,0500	113,4000
				593,7227	*	1,04				617,9985
					(se stesse rate e tassi)					

N.B. I valori posticipati possono ottenersi dai corrispondenti valori anticipati moltiplicati per il fattore di capitalizzazione