Rendite a Rate Variabili

Benedetto Matarazzo

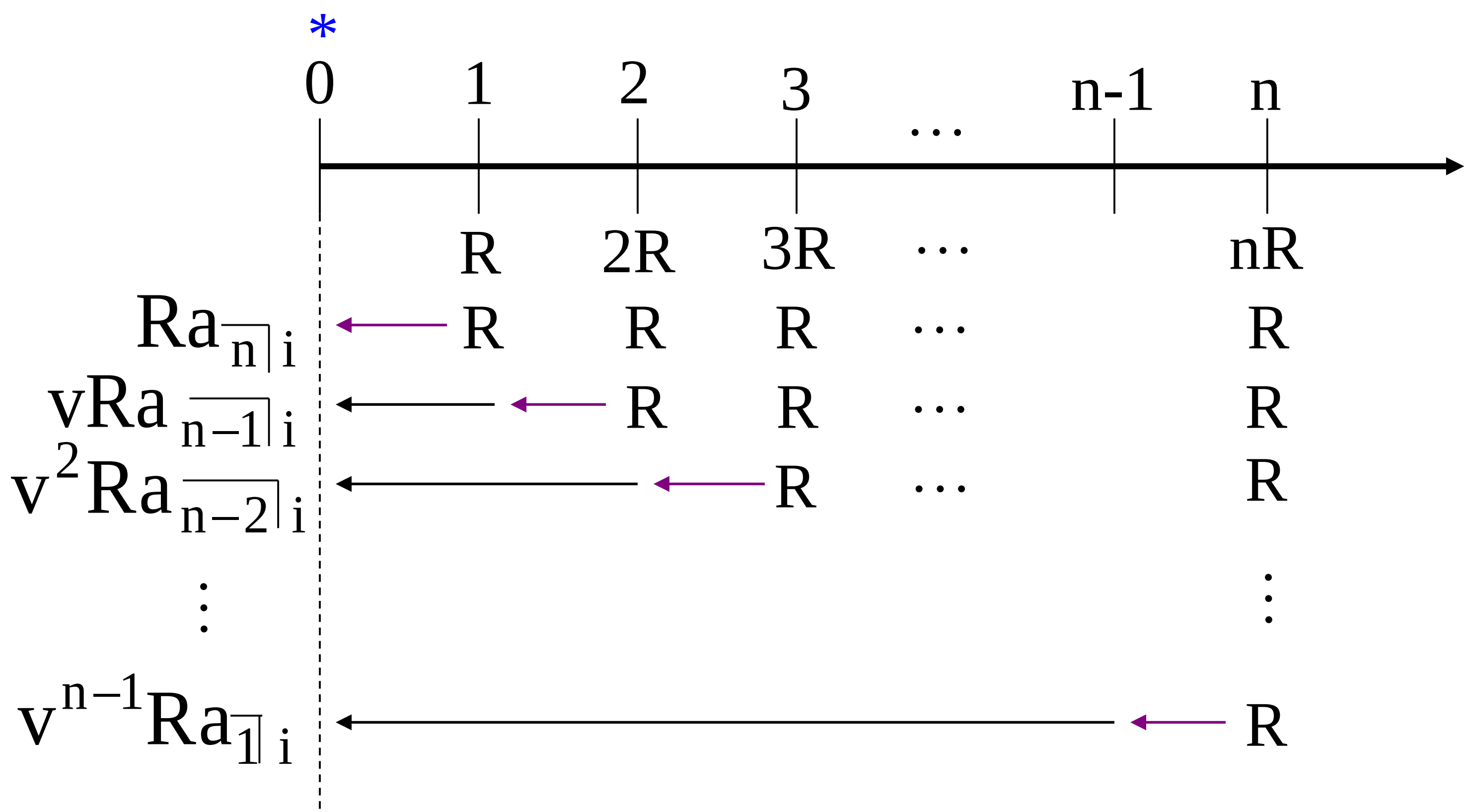
Corso di Matematica Finanziaria

Rendite certe

- Definizioni preliminari
- Rendite Discrete
  - Rendite Continue
  - Rendite Temporanee
  - Rendite Perpetue
  - Rendite Differite
  - Rendite Intere
  - Rendite Frazionate
  - Rendite a Rate Costanti
  - Rendite a Rate Variabili
- Problemi relativi alle rendite

Rendite con rate variabili in progressione aritmetica

1) $R_1 = d$ $\quad$ $(d > 0, \text{ ragione}) \Rightarrow R_s = sR_1 = sR \qquad s = 1, 2, \ldots, n$



Tasso d'interesse periodale costante i

Rendite con rate variabili in progressione aritmetica

Valore attuale posticipato

$$R\sum_{s=1}^{n} v^{s-1} a_{\overline{n-s+1}|\, i} = R\sum_{s=1}^{n} v^{s-1}\frac{1-v^{n-s+1}}{i} =$$

$$= R\sum_{s=1}^{n}\frac{v^{s-1}-v^{n}}{i} = \frac{R}{i}\left[\underbrace{\sum_{s=1}^{n} v^{s-1}}_{\ddot{a}_{\overline{n}|\, i}} - nv^{n}\right] =$$

$$= R\,\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|\, i} - nv^{n}}{i} = R\,[Ia]_{\overline{n}|\, i}$$

Rendite con rate variabili in progressione aritmetica

Montante posticipato

$$R[Ia]_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^n = R(1+i)^n \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} - nv^n}{i} =$$

(scindibilità)

$$= R\frac{\ddot{s}_{\overline{n}|\,i} - n}{i} = R[Is]_{\overline{n}|\,i}$$

Rendite con rate variabili in progressione aritmetica

2) $R_s = R + (s-1)d$,   ragione $d \in \mathbb{R}^+$, $s = 1, 2, \ldots, n$

$*$

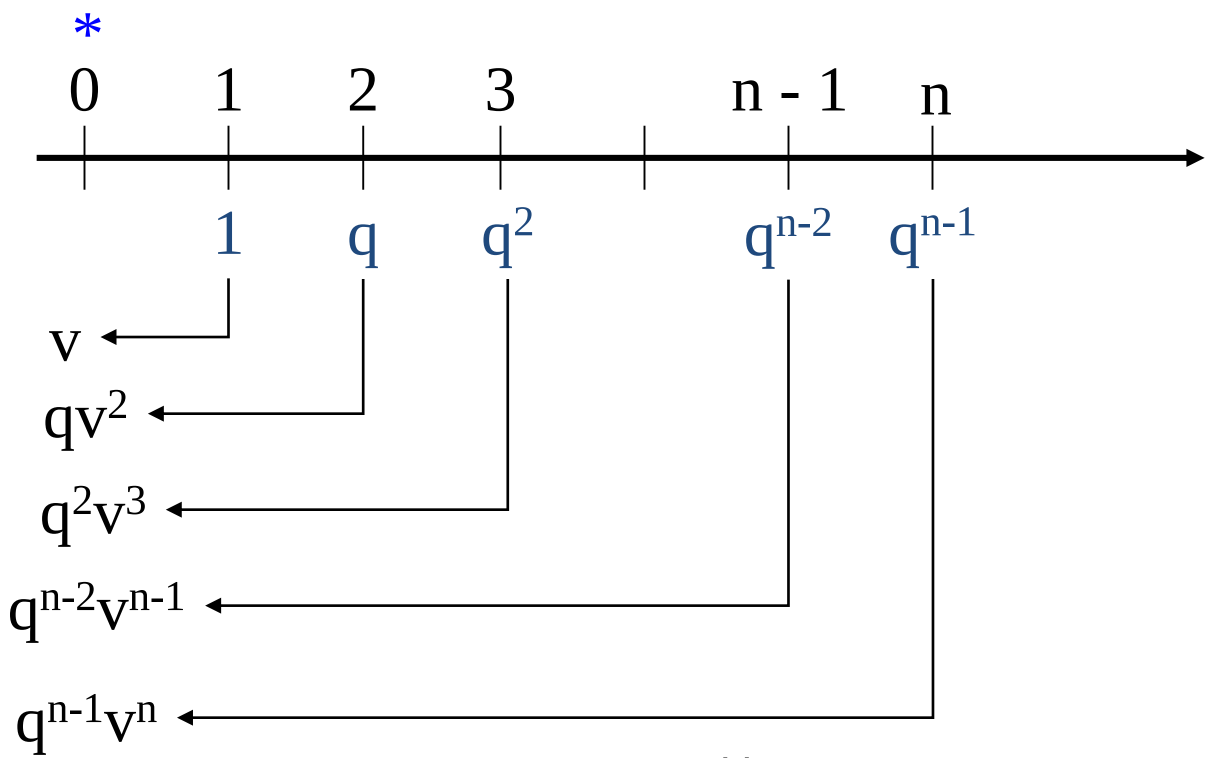
0	1	2	3	…	n - 1	n
	R	$R+d$	$R+2d$		$R+(n-2)d$	$R+(n-1)d$
$Ra_{\overline{n}\rceil i} \leftarrow$	R	R	R	…	R	R
		d	d	…	d	d
			d	…	d	d
				…	d	d
$vd[Ia]_{\overline{n-1}\rceil i} \leftarrow$						d

$d[Ia]_{\overline{n-1}\rceil i}$

(valutata in 1)

Valore attuale posticipato $= Ra_{\overline{n}\rceil i} + vd[Ia]_{\overline{n-1}\rceil i}$

Rendite con rate variabili in progressione geometrica



$q > 0$ (ragione)

$$\Downarrow$$

$$v + qv^2 + q^2v^3 + \ldots + q^{n-2}v^{n-1} + q^{n-1}v^n$$

…posto…

<u>Valore attuale posticipato</u>

Rendite con rate variabili in progressione geometrica 1

…posto…   j: tasso di crescita

$$q = 1 + j\,; \qquad qv = \frac{1+j}{1+i}; \qquad q > 0 \Leftrightarrow j > -1, \qquad qv > 1 \Leftrightarrow j > i$$

Se $qv = 1 \quad (i = j): [Ka(q)]_{\overline{n}|\,i} = v + qv^2 + q^2v^3 + \ldots + q^{n-1}v^n = nv = \frac{n}{1+i};$

Se $qv \neq 1: \quad [Ka(q)]_{\overline{n}|\,i} = v\left(1 + qv + q^2v^2 + \ldots + q^{n-1}v^{n-1}\right) =$

$$= v\frac{1-(qv)^n}{1-qv} = \frac{1-(qv)^n}{i-j} \qquad (i \neq j)$$

Oppure…

Rendite con rate variabili in progressione geometrica 2

Oppure, posto $qv = \frac{1}{1+k}$: (k : “tasso” fittizio; qv>0 $\Leftrightarrow$ -1<k)

$$[ka(q)]_{\overline{n|}\, i} = \frac{1}{q}\left(qv + q^2v^2 + \ldots + q^n v^n\right) =$$

$$= \frac{1}{q}\left[\frac{1}{1+k} + \frac{1}{(1+k)^2} + \ldots \frac{1}{(1+k)^n}\right] = \frac{1}{q} a_{\overline{n|}\, k} \qquad \left(k = \frac{i-j}{1+j}\right)$$

$(k > 0 \Leftrightarrow i > j)$

Rendite con rate variabili in progressione geometrica

<u>Montante posticipato</u>

$$\left[ks(q)\right]_{\overline{n|}\, i} = (1+i)^n \left[ka(q)\right]_{\overline{n|}\, i} = \frac{1}{q} s_{\overline{n|}\, k} = \frac{(1+i)^n - (1+j)^n}{i-j}$$

<u>Valore attuale di una rendita posticipata perpetua</u>

$$\left[ka(q)\right]_{\overline{\infty|}\, i} = \lim_{n\to\infty} \left[ka(q)\right]_{\overline{n|}\, i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(qv)^n}{i-j} = \begin{cases} \dfrac{1}{i-j}, & i > j \\ +\infty, & i \le j \end{cases}$$

(Modello di Gordon)

Esempio

- R = 200; n = 10; i = 0,08; j= 0,05;

- Valore attuale posticipato:

$$200*1/(1+0{,}08)*(1-(1{,}05/1{,}08)^{10})/(0{,}08-0{,}05) = 200*7{,}577=1515{,}473$$

- Se rendita perpetua (rata crescente in progressione geometrica):

$$200/(0{,}08-0{,}05) = 6666{,}67$$

- Se perpetua a rata costante:

$$200/0{,}08 = 2.500$$