Tassi Equivalenti

Benedetto Matarazzo

Corso
di
Matematica Finanziaria

Regimi finanziari

- Operazioni finanziarie
  - Interesse e Sconto
  - Equivalenze finanziarie
- Regime dell’interesse semplice
  - Regime dell’interesse composto
  - Regime dell’interesse anticipato (sconto commerciale)
  - Regimi coniugati
- Principali proprietà di un qualsiasi regime finanziario
  - Confronto tra regimi
- Tassi effettivi
  - Tassi equivalenti
  - Tassi nominali
  - Tassi istantanei
  - Tassi medi
  - Forza d’interesse e di sconto
- Scindibilità
  - Regimi scindibili
  - Scindibilità e forza d’interesse

Tassi equivalenti

(cambiamento dell'unità di tempo)

In un assegnato regime di capitalizzazione, due tassi di interesse i_1 e i_2 (o di sconto d_1 e d_2) si dicono equivalenti se i corrispondenti fattori di capitalizzazione (o di attualizzazione) per un'operazione finanziaria della stessa durata t risultano eguali, ossia:

$$f(i_1,t) = f(i_2,t), \quad t>0, \qquad \text{oppure} \qquad \varphi(d_1,t) = \varphi(d_2,t), \quad t>0$$

Naturalmente ogni tasso e la corrispondente durata devono essere espressi con riferimento allo stesso periodo unitario di tempo:

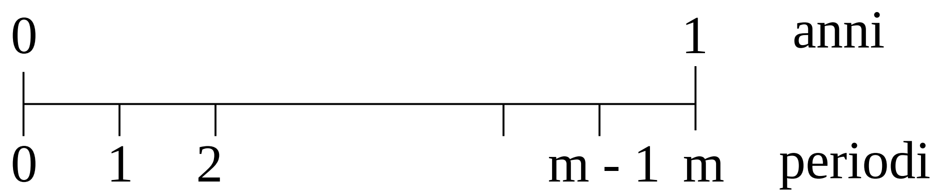
- i: tasso d'interesse annuo (periodo unitario)

-i_m: tasso d'interesse periodale (riferito ad 1/m di anno, m>0;
es. i_2 : tasso semestrale, i_{12} : tasso mensile, $i_{1/3}$: tasso triennale,…);
quindi alla durata t espressa in anni corrispondente al tasso i, equivarrà la durata mt (in termini della nuova unità di tempo) in corrispondenza del tasso i_m

Tassi equivalenti

Regime dell'interesse semplice

Sia i il tasso d'interesse annuo (periodo unitario); sia i_m il tasso d'interesse periodale (riferito ad 1/m di anno), per cui i_{12} il tasso d'interesse mensile, i_4 il tasso d'interesse trimestrale, ecc.
Si avrà:



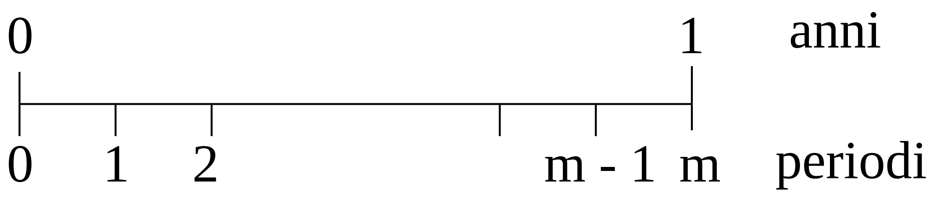
$$f_s(t) = 1 + i\,t = 1 + i_m m\,t \Leftrightarrow i = m\,i_m; \quad \text{ossia:} \quad i_m = \frac{i}{m} \quad (m > 0).$$

Più in generale: $ni_n = mi_m$, $(n,m>0)$. Per esempio: $12i_{12}=2i_2$.

Tassi equivalenti

Regime dell'interesse anticipato

Sia d il tasso di *sconto* annuo (periodo unitario); sia d_m il tasso di sconto periodale (riferito ad $1/m$ di anno), per cui d_{12} il tasso di sconto mensile, d_4 il tasso di sconto trimestrale, ecc.
Si avrà:



$$\phi_{cm}(t) = 1 - d\,t = 1 - d_m m\,t \Leftrightarrow d = m\,d_m; \quad \text{ossia}: \quad d_m = \frac{d}{m} \quad (m > 0).$$

Più in generale: $nd_n = md_m$, $(n,m>0)$.

Tassi equivalenti
Regime dell'interesse composto

$$f_c(t) = (1+i)^t = (1+i_m)^{mt} \Leftrightarrow \quad 1+i = (1+i_m)^m \quad \text{e quindi:}$$

$$i = (1+i_m)^m - 1; \qquad i_m = (1+i)^{1/m} - 1 \qquad (m > 0)$$

Per esempio, i = $(1+i_2)^2$-1 e $i_{12} = (1+i)^{1/12}$-1.

Pertanto, nel regime dell'interesse composto risultano:

$$\frac{i}{m} < i_m \quad per \quad m < 1 \quad e \quad \frac{i}{m} > i_m \quad per \quad m > 1$$

a causa della capitalizzazione degli interessi ogni *m*-simo di anno

Tasso annuo nominale convertibile

Dicesi tasso annuo nominale convertibile m volte in un anno e si indica con j_m il prodotto del tasso periodale effettivo i_m per il numero m ($m>0$) dei periodi: $j_m = mi_m$ (da cui $i_m = \frac{j_m}{m}$).

In altri termini, j_m rappresenta la somma aritmetica dei tassi di interesse periodali i_m corrisposti complessivamente nel periodo unitario (anno) considerato.

Regime dell'interesse semplice

Essendo in tale regime $i=mi_m$, risulta banalmente $i=j_m$, per ogni $m>0$.

Tasso annuo nominale convertibile
Regime dell'interesse composto

Da $i = (1+i_m)^m - 1$, si ha: $i = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1$ e $j_m = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$ ($j_m < i \Leftrightarrow m > 1$)

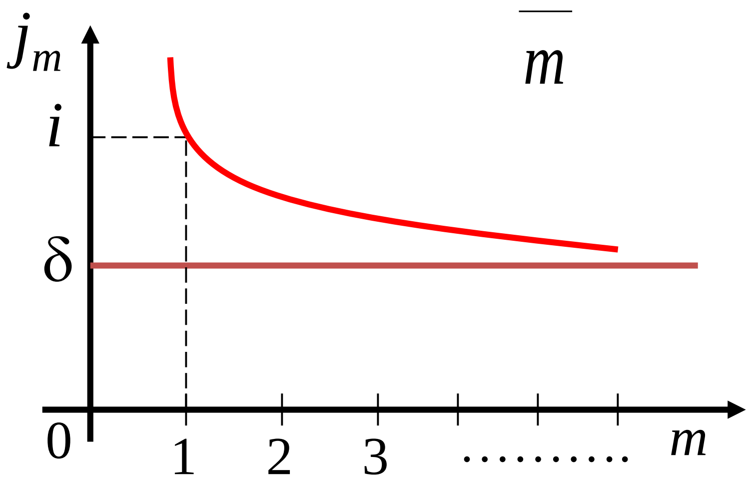
A parità di tasso annuo effettivo i, j_m decresce con m.

$$j_1 = i\ ;\ j_{m+1} < j_m\ ,\ \forall\, m > 0 \quad (i > -1,\ i \neq 0)$$

(funzione monotona decrescente)

Risultano:

$$\lim_{m \to +\infty} j_m = \lim_{m \to +\infty} \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{\frac{1}{m}} = \log(1+i) = \delta$$



δ: Intensità istantanea d'interesse relativa alla legge dell'interesse composto o tasso istantaneo di interesse

$$\lim_{m \to 0_+} j_m = +\infty \qquad (i > 0)$$

Esempio

	TASSI **DI INTERESSE** EQUIVALENTI e NOMINALI				
i_m	Tasso periodale equivalente				
j_m	Tasso annuo nominale convertibile m volte				
i	Tasso annuo effettivo				
m	Numero di periodi di capitalizzazione per anno				
	j_m	0,12		i	0,12
Frequenza	m	i		$j_m=mi_m$	i_m
Bi-annuale	0,5	0,1135529		0,1272	0,2544
Annua	1	0,12		0,12	0,12
Semestrale	2	0,1236		0,116601049	0,058300524
Trimestrale	4	0,1255088		0,114949379	0,028737345
Mensile	12	0,126825		0,113865515	0,009488793
Settimanale	52	0,127341		0,113452269	0,002181774
Giornaliera	365	0,1274746		0,113346281	0,000310538
Continua	$\longrightarrow \infty$	0,1274969		δ=ln(1+i)=0,113328685	

Tassi di sconto equivalenti
Regime dell'interesse composto

$$\phi_c(t) = (1-d)^t = (1-d_m)^{mt} \Leftrightarrow \; 1-d = (1-d_m)^m$$ e quindi:

$$d = 1-(1-d_m)^m; \qquad d_m = 1-(1-d)^{1\backslash m} \qquad (m > 0)$$

Pertanto, nel regime dell'interesse composto risultano:

$$\frac{d}{m} < d_m \quad per \quad m > 1 \quad e \quad \frac{d}{m} > d_m \quad per \quad m < 1.$$

Tasso di sconto nominale convertibile m volte in un anno:

$\sigma_m = md_m$, da cui $d_m = \frac{\sigma_m}{m}$ (somma aritmetica degli sconti periodali).

A parità di tasso di sconto annuo effettivo d, σ_m cresce con m.

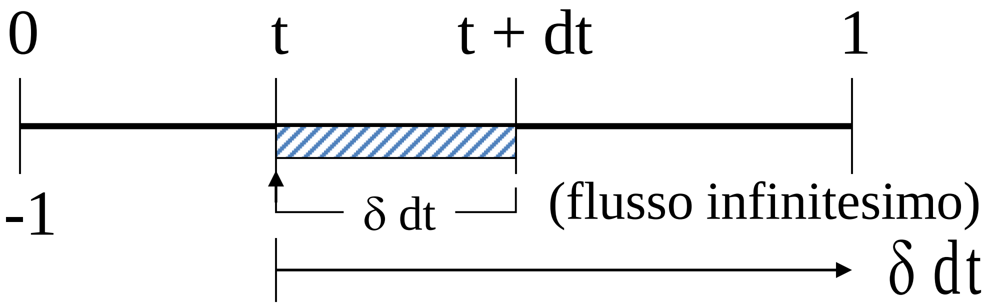
$$\lim_{m \to +\infty} \sigma_m = \lim_{m \to +\infty} \frac{1-(1-d)^{1/m}}{\frac{1}{m}} = -\log(1-d) = \log\frac{1}{1-d} = \theta$$: tasso istantaneo di sconto

Ricordando che d=i/(1+i), si ha: $\vartheta = \log\frac{1}{1-d} = \log(1+i) = \delta.$

Intensità istantanea di interesse

δ: intensità istantanea di interesse o tasso istantaneo di interesse o tasso nominale annuo convertibile infinite volte nell'anno:

$m \to +\infty, \quad \text{rata} : i_m \to$ flusso uniforme e continuo per l'ammontare nominale δ, in [0,1]



$$\delta\, dt (1+i)^{1-t} = \boldsymbol{log}(1+i)\, dt\, (1+i)^{1-t}$$

Montante complessivo del flusso di interessi al tempo 1 $(\Sigma \to \int)$:

$$\int_0^1 \log(1+i)(1+i)^{1-t} dt = \left[-(1+i)^{1-t}\right]_0^1 = (1+i)^1 - 1 = i$$

Al tempo T (T>0) si avrebbe un montante pari a $(1+i)^T - 1$

… continua ...

Intensità istantanea di interesse

(continua)

Montante di un capitale unitario nel periodo di ampiezza *dt* (convenzione lineare): $1+\delta dt$ (δdt: interesse maturato); reinvestendo al tasso δ per l'intero anno (ossia, per $1/dt$ periodi):

$$M = (1+\delta\, dt)^{1/dt}$$

Passando al limite, per $dt \to 0$ si ha:

$$\lim_{dt \to 0} (1+\delta\, dt)^{1/dt} = \lim_{1/dt \to \infty} \left(1+\frac{\delta}{1/dt}\right)^{1/dt} = e^{\delta} = 1+i$$

L'interesse annuo totale è: $e^{\delta} - 1 = i$

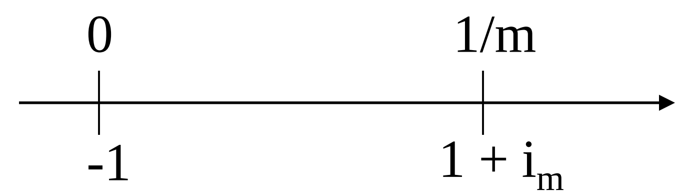
… continua ...

Intensità istantanea di interesse

(continua)

$$j_m = m i_m = \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1\frac{1}{m}}:$$

intensità (media) d'interesse nel periodo [0, 1/m]



costante anche nei periodi successivi.

Da cui: $\lim_{m \to +\infty} j_m = \delta = \log(1+i)$ (intensità istantanea d'interesse);

si ottengono quindi:

$$1 + i = e^{\delta} \Rightarrow i = e^{\delta} - 1$$

$$u^t = f_c(t) = (1+i)^t = e^{\delta t}; \quad v^t = \varphi_c(t) = (1+i)^{-t} = e^{-\delta t}$$

fattori di capitalizzazione e di attualizzazione nel regime dell'interesse composto, in funzione dell'intensità istantanea d'interesse δ.

Esempio

i	=	0,10	δ = log(1+0,10) =		0,09531
δ	=	0,10	i = e^{δ}-1 =		0,105171

Se $\delta = 1$ (tasso istantaneo di interesse = 100% annuo) e $t = 1$:
$F(1) = e^{\delta t} = e = 2,7182\ldots$
$i = e^{\delta} - 1 = e - 1 = 1,7182\ldots$, cioè 171,82% annuo

Tassi medi nel regime composto

Noti i valori V_j, $j=t_0, t_1, \ldots, t_n$, di un'attività finanziaria al tempo j ($j \geq 0$) espresso in anni, si vogliono ricavare le relazioni esistenti tra tali valori ed i tassi annuo *i* ed istantaneo δ di interesse ipotizzati costanti per tutta la durata dell'operazione. Si hanno rispettivamente:

per t>0 | in particolare, per t=1

$$V_t = V_0(1+i)^t \Rightarrow i = \left(\frac{V_t}{V_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \qquad\qquad i = \frac{V_1}{V_0} - 1$$

$$(V_t \geq 0,\ V_0 > 0)$$

$$V_t = V_0\, e^{\delta t} \Rightarrow \delta = \frac{1}{t}\log\frac{V_t}{V_0} \qquad\qquad \delta = \log\frac{V_1}{V_0}$$

Se sono noti i valori $V_0, V_1, \ldots, V_n$ rispettivamente ai tempi $t_0, t_1, \ldots, t_n$, (spesso con $t_j - t_{j-1}, =1, \forall j$), possono calcolarsi i corrispondenti tassi periodali i_j e δ_j in (t_{j-1}, t_j), $j=t_1, \ldots, t_n$, ossia:

$$i_j = \sqrt[t_j - t_{j-1}]{\frac{V_j}{V_{j-1}}} - 1 \quad e \quad \delta_j = \frac{1}{t_j - t_{j-1}}\log\frac{V_j}{V_{j-1}},\ V_k > 0\ \ \forall k.$$

Tassi medi nel regime composto

(continua)

Se si conoscono le distribuzioni di i_j e δ_j nel periodo (t_0, t_n), i valori medi ($\bar{i}$ e $\bar{\delta}$) dei tassi periodali ed istantanei corrispondenti devono soddisfare rispettivamente le seguenti relazioni:

$$V_0(1+i_1)^{t_1-t_0}\ldots(1+i_n)^{t_n-t_{n-1}} = V_0(1+\bar{i})^{t_n-t_0} \quad e \quad V_0 e^{\delta_1(t_1-t_0)}\ldots e^{\delta_n(t_n-t_{n-1})} = V_0 e^{\bar{\delta}(t_n-t_0)}.$$

Si ottengono, pertanto:

$$\bar{i} = \sqrt[t_n-t_0]{(1+i_1)^{t_1-t_0}\ldots(1+i_n)^{t_n-t_{n-1}}} - 1 \quad e \quad \bar{\delta} = \frac{\delta_1(t_1-t_0)+\ldots+\delta_n(t_n-t_{n-1})}{t_n-t_0}$$

"media geometrica" "media aritmetica"

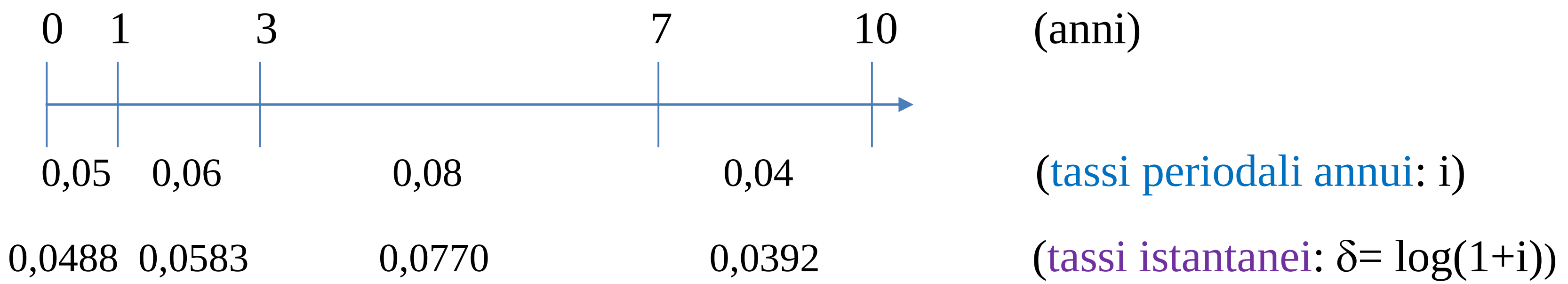
Se $t_j - t_{j-1} = 1\ \forall j$ (periodi unitari), risultano in particolare:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{(1+i_1)\ \ldots(1+i_n)} - 1 \quad e \quad \bar{\delta} = \frac{\delta_1+\ldots+\delta_n}{n}$$

che possono esprimersi anche in funzione dei valori V_j, j=0, 1,…,n:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{V_1}{V_0}\ldots\frac{V_n}{V_{n-1}}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{V_n}{V_0}} - 1 \quad e \quad \bar{\delta} = \frac{1}{n}\left(\log\frac{V_1}{V_0}+\ldots+\log\frac{V_n}{V_{n-1}}\right) = \frac{1}{n}\log\frac{V_n}{V_0}.$$

Esempio



$C_0 = 1$
$F(10) = 1{,}805494$

Tasso medio annuo $= ((1+0{,}05)(1+0{,}06)^2(1{,}08)^4(1{,}04)^3)^{1/10} - 1 = 0{,}0609$
ossia $(1+0{,}0609)^{10} = 1{,}805494 = F(10)$

Tasso istantaneo medio $= (0{,}0488*1+0{,}0583*2+0{,}0770*4+0{,}0392*3)/10 = 0{,}0591$
ossia $e^{(0{,}0591*10)} = 1{,}805494 = F(10)$